LA GEOMETRIA. PROBLEMI LOGICI E DIDATTICI

di Carlo Felice Manara

Inserto redazionale a «Scuola e Didattica» n. 3 del 15-10-1984, Ed. La Scuola - Brescia

La «Melencolia» *di* Albrecht Dürer *(1471-1519). La celebre incisione è allegorica e contiene dei simboli dei quali non è ancora perfettamente noto il significato, nelle intenzioni dell'artista. Interessante il fatto che compaiano degli oggetti collegati con la Matematica, come il poliedro che sta a sinistra, il 'quadrato magico' in alto a destra, e il compasso che il personaggio tiene nelle mani. All'epoca del Dürer, lo studio della Matematica era spesso collegato con la magia e con le scienze occulte. Nel 'quadrato magico' la somma dei numeri che stanno su ogni colonna, quella dei numeri che stanno su ogni riga, e quelli che stanno sulle diagonali, è sempre la stessa e vale 34.*

LA GEOMETRIA. PROBLEMI LOGICI E DIDATTICI

di Carlo Felice Manara

I. LA GEOMETRIA E LA CONOSCENZA DEL MONDO FISICO

1) Il problema dello «spazio geometrico»

«La questione *"che cosa è lo spazio"* non ha cessato di sollevare discussioni tra i filosofi fino dall'antichità».

Così suona la frase iniziale dell'articolo di F. Enriques intitolato «Spazio e tempo davanti alla critica moderna» ed inserito nel Vol. II (Art. 12) dell'opera *Questioni riguardanti le matematiche elementari* [6, *i*].

Siamo convinti che la frase dell'illustre matematico e filosofo risponda pienamente a verità e quindi non ci illudiamo di esporre delle cose molto importanti, in un argomento che ha occupato le menti dei più grandi filosofi dell'umanità.

Tuttavia riteniamo che qualche chiarimento non sia del tutto inutile in proposito, soprattutto in presenza del fatto che l'argomento (che ha — come si è detto — affaticato le menti più alte dei pensatori) non cessa di interessare anche oggi i ricercatori, e soprattutto i fisici ed i filosofi della scienza.

Molti di questi infatti vogliono meditare sul significato e sull'essenza delle teorie che essi costruiscono incessantemente allo scopo di conoscere sempre meglio l'universo che ci circonda.

Anticipando in parte le conclusioni di ciò che intendiamo esporre, diremo che per parte nostra pensiamo che sia, forse, non opportuno parlare di «spazio», quasi che questo termine designasse un ente ben determinato. Naturalmente non intendiamo qui aprire una discussione filosofica, nè contrastare ad un'abitudine di espressione che si è diffusa anche nella letteratura scientifica. Tuttavia crediamo che — a nostro parere — allo stato della critica sui fondamenti delle matematiche, il termine «spazio» potrebbe risultare equivoco; per esempio, pensiamo che sia poco opportuno ed anche fuorviante parlare di «proprietà dello spazio», quando si sa bene che la critica geometrica del secolo XIX ha tolto a questa ed a simili espressioni ogni significato scientifico.

Per esempio, il solo fatto che in Geometria si parli di «spazio affine», oppure di «spazio proiettivo», oppure di «spazio euclideo», indica che il termine ha un significato che è sostanzialmente convenzionale e che ogni definizione che se ne volesse dare ha il significato che B. Pascal ha così chiaramente spiegato [18, *i*].

In particolare pensiamo di poter adottare la concezione moderna, secondo la quale le proprietà di uno «spazio» sono determinate dalle proposizioni primitive che si enunciano all'inizio di una teoria (postulati), quindi non si accetta che esista uno «spazio» in sè, avente certe proprietà «evidenti», talmente evidenti che basta aprire gli occhi per vederle, ed altre «meno evidenti», che debbono essere dedotte con il ragionamento o con il calcolo.

Ci conforta il pensiero che questa nostra opinione concordi con quella, molto più autorevole, che G. Peano [19, *ii*] esprimeva già nel 1894, in forma lievemente ironica, con le seguenti frasi:

«In quasi tutti i trattati italiani moderni si introduce per primo il concetto di *spazio*, dicendo che esso non si definisce, ma gli si attribuiscono le proprietà di essere omogeneo, illimitato, infinito, divisibile, immobile ecc., proprietà queste parimenti non definite.

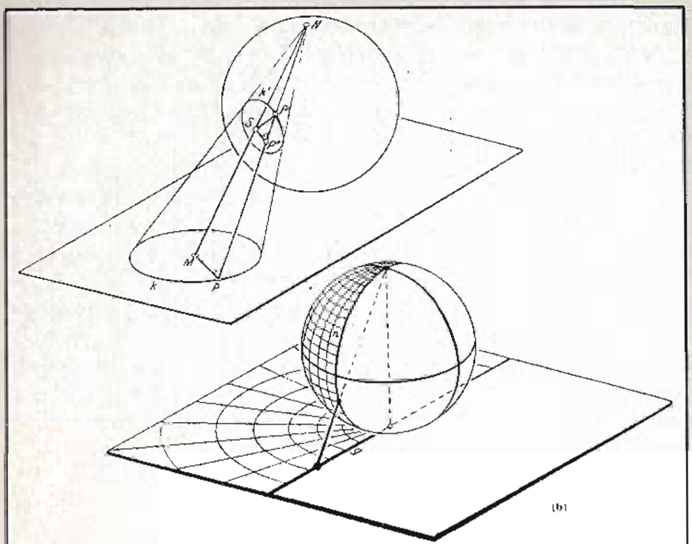
Ritenendo pertanto il concetto di spazio come fondamentale per la Geometria, ne viene che non si potrebbe scrivere un trattato di questa scienza in una lingua che per avventura manchi di tali parole. Quindi non si potrebbe scrivere di Geometria nella lingua d'Euclide e di Archimede, ove appunto manca la parola corrispondente al termine *spazio*, nel senso in cui lo si usa nei moderni trattati».

2) La crisi della concezione classica della Geometria

Per poter esporre più chiaramente il nostro pensiero crediamo sia utile una breve rassegna sulla concezione classica della Geometria e sulla crisi vissuta da questa scienza durante il secolo XIX.

Invero nell'atteggiamento classico la Geometria ci si presenta come una dottrina che enuncia delle proposizioni vere a proposito di certi oggetti: punti, rette, piani, figure e così via; tali proposizioni sono accettate come vere per due ragioni: o perché sono considerate evidenti per sè, oppure perché sono dimostrate in modo logicamente rigoroso a partire dalle prime, che sono chiamate «postulati».

La storia ha registrato discussioni, durate più di venti secoli a proposito delle proposizioni enunciate da Euclide senza dimostrazione, cioè di quelle che Euclide enumera tra i postulati: in particolare fu oggetto di discussione il quinto postulato, quello che viene comunemente chiamato «della parallela», perché equivale sostanzialmente alla affermazione della unicità della parallela condotta ad una retta da un punto fuori di essa.



La corrispondenza che nasce dalla operazione di proiezione può essere definita anche tra una quadrica ed un piano; nel caso in cui la quadrica sia una sfera si ottiene la proiezione stereografica della sfera, che permette la rappresentazione delle regioni della Terra sul piano con la conservazione degli angoli.

I numerosi tentativi fatti per ricondurre questa proposizione nel numero dei teoremi, cioè per dimostrarla logicamente, potrebbero essere interpretati come altrettante prove del fatto che la proposizione stessa è stata per lunghissimo tempo considerata come vera obiettivamente, cioè come una proposizione che enuncia delle proprietà vere di certi enti effettivamente esistenti.

Sulla natura di questi enti non pare esistessero dubbi, anche se si discusse a lungo sul significato e sulla portata delle proposizioni che Euclide enuncia su di loro; invero negli *Elementi* si trovano delle frasi iniziali, che Euclide chiama «termini» (*oroi*, in greco) e le prime due di esse sono:

il punto è ciò che non ha parte;
la retta è la linea che giace ugualmente rispetto a tutti i suoi punti.

Per più di venti secoli, glossatori e commentatori di Euclide si sono sforzati di interpretare e di analizzare queste proposizioni [8, 13]; riteniamo di poter dire che l'opinione della critica moderna è che tali frasi non siano delle definizioni nel senso tecnico del termine, ma piuttosto delle illustrazioni, dei chiarimenti, degli aiuti per i lettori o per gli ascoltatori a formarsi l'immagine e poi il concetto del punto, della retta e degli altri enti successivamente nominati.

Queste difficoltà nella precisazione della natura degli enti di cui la Geometria parla si accompagnarono alle difficoltà che riguardavano (come abbiamo già detto) le altre proposizioni iniziali del trattato euclideo. Si giunse così all'idea di costruire una Geometria «assoluta», cioè di costruire un sistema di proposizioni che fossero valide indipendentemente dalla validità o meno del postulato euclideo della parallela [2]; si giunse a costruire delle dottrine in cui le proposizioni iniziali fossero sostanzialmente la negazione del postulato euclideo [16]; si giunse, con B. Riemann, a cercare di costruire la Geometria su basi di partenza del tutto diverse da quelle che servirono da piedistallo per Euclide [21]. Il passo definitivo, in questa direzione, fu compiuto quando si giunse alla dimostrazione della compatibilità logica delle Geometrie non euclidee, cioè si giunse alla certezza che queste dottrine non contengono in sè delle contraddizioni, ma hanno lo stesso rango, lo stesso diritto di cittadinanza nell'ambito della Matematica che compete alla Geometria euclidea classica.

Non intendiamo insistere sull'argomento, ma ci limitiamo a concludere che il risultato della dimostrazione della compatibilità logica delle Geometrie non euclidee fu, tra l'altro, l'abbandono del modo di pensare che portava a considerare la Geometria come scienza delle figure oppure dello spazio metrico oppure con altre frasi della stessa o di analoga natura. Invero, se esistesse un oggetto determinato studiato dalla Geometria, questo non potrebbe essere conosciuto attraverso teorie tra loro contraddittorie; la sua esistenza dovrebbe portare di conseguenza la validità di una delle Geometrie e la falsità delle altre. Invece si verifica il fatto, abbastanza paradossale, che, per esempio, nella procedura di E. Beltrami [1] la Geometria euclidea fornisce gli strumenti per costruire dei modelli che portano a constatare la validità di quella non euclidea; e, viceversa, nello spazio di N. Lobatchewski sulla orisfera vale la Geometria euclidea [9].

È abbastanza comprensibile che una situazione di questo tipo possa portare inizialmente ad un certo grado di perplessità; è anche abbastanza comprensibile che tale perplessità sia resa ancor più grave dalla immagine che tradizionalmente si aveva della Geometria, scienza considerata come paradigma della chiarezza e della certezza, a tal punto che B. Spinoza aveva intitolato una sua opera *Ethica ordine geometrico demonstrata,* quasi per dare, attraverso il richiamo alla Geometria, l'immagine del rigore deduttivo e della chiarezza espositiva.

Al di là di ogni situazione psicologica di disagio e di perplessità, è abbastanza evidente che una situazione gnoseologica di questo genere ha portato con sè la necessità di rivedere l'interpretazione ed il giudizio sul significato della Geometria.

Quindi, nell'atteggiamento attuale, la Geometria non è più considerata, al modo classico, come una scienza che parla di certi oggetti e di certi contenuti, ma come un sistema ipotetico-deduttivo, una specie di puro gioco logico, le cui regole sono costituite dai postulati, cioè dalle proposizioni iniziali che si enunciano senza dimostrazione, e nel quale la validità delle proposizioni dimostrate (*teoremi*) consiste essenzialmente nel rigoroso rispetto delle leggi logiche che permettono di dedurle dalle proposizioni iniziali. Se ne può avere un'idea considerando, per esempio, l'inizio del classico trattato di D. Hilbert [14]:

«Consideriamo tre diversi sistemi di oggetti; chiamiamo punti gli oggetti del primo sistema ... chiamiamo rette gli oggetti del secondo sistema ... chiamiamo piano gli oggetti del terzo sistema».

In un atteggiamento cosiffatto quindi non si cerca di precisare esplicitamente la natura degli oggetti indeterminati di cui si parla; tale natura viene definita implicitamente dal sistema di proposizioni iniziali che si enunciano.

Queste proposizioni danno pertanto quella che si chiama «definizione implicita» degli oggetti considerati; e non vi è alcuna ragione di perplessità nel fatto che oggetti a cui sono attribuiti nomi uguali abbiano diverse proprietà in diverse teorie; semplicemente essi sono degli oggetti diversi, perché diversi sono i sistemi di postulati che li definiscono, e la uguaglianza dei nomi è da considerarsi del tutto accidentale. In modo analogo, con un medesimo mazzo di carte si possono fare vari giochi, in ciascuno dei quali una medesima carta ha diversi valori; l'uguaglianza dei nomi e degli aspetti esteriori è puramente accidentale, perché la diversità delle regole di gioco fa sì che si tratti di carte essenzialmente diverse.

L'esempio tipico è fornito dalla Geometria proiettiva dello spazio reale tridimensionale, nella quale la legge di dualità permette di interpretare in due modi diversi ogni postulato e ogni proposizione che se ne deduce, ottenendo così delle proposizioni sempre valide.

Appare abbastanza naturale che, in questo ordine di idee, l'osservazione del mondo esterno non imponga più le proposizioni iniziali, da accettarsi perché «evidenti» per se stesse, ma semplicemente suggerisca tali proposizioni, le quali possono essere scelte con una certa arbitrarietà, che rispetti tuttavia (anche in senso molto lato) la natura della scienza che si sta costruendo e la continuità della tradizione secolare di essa.

Va osservato tuttavia che, da un atteggiamento cosiffatto, che si presenta in teoria come semplice e rigoroso, nascono vari problemi, a differenti livelli.

I problemi logici che nascono da questo nuovo atteggiamento saranno toccati nel prossimo capitolo. Qui ci limiteremo ad accennare brevemente ai problemi che riguardano la genesi psicologica dei concetti della Geometria, perché pensiamo che essi abbiano qualche attinenza ai problemi che stanno alla base della nostra costruzione delle teorie fisico-matematiche della realtà fisica.

3) La genesi psicologica dei concetti geometrici

Abbiamo visto che nel secolo XIX la Geometria ha vissuto una crisi di importanza fondamentale: crisi che ha costretto i matematici a cambiare radicalmente il proprio modo di giudicare questo ramo della scienza. Appare quindi anche naturale che nello stesso secolo abbiano avuto una grande fioritura gli studi dedicati alla analisi della genesi psicologica dei concetti della Geometria. Anche su questo argomento sarebbe imprudente ed illusorio cercare di dare una esposizione completa della evoluzione del pensiero dei matematici e dei filosofi che se ne sono occupati; ci limiteremo quindi ad esporre i momenti e gli atteggiamenti che ci sembrano più significativi agli effetti della esposizione che vogliamo fare. A questo proposito ci sembra particolarmente interessante la posizione esposta da F. Enriques nel trattare del *Problema psicologico dell'acquisto delle nozioni spaziali* [6, *i*].

Egli infatti distingue tra le nozioni concernenti la Geometria proiettiva, che riguardano soltano i concetti di punto, retta, piano e le relazioni di appartenenza, e quelle della Geometria metrica (elementare, nel senso classico della parola), che coinvolgono anche nozioni di uguaglianza, di trasporto rigido e quindi di movimento.

La genesi psicologica delle nozioni di Geometria proiettiva è quindi da far risalire alle sensazioni acquisite mediante gli organi della vista, mentre la genesi psicologica delle nozioni e dei concetti della Geometria metrica è da far risalire a sensazioni di natura più complessa: tattili-muscolari, propriocezione e così via. Ed anche in questo secondo genere di sensazioni vi è luogo a distinguere tra quelle dovute al tatto speciale, che potrebbero dar luogo alle nozioni riguardanti la congruenza e quindi alla Geometria metrica nel senso generale del termine, e quelle tattili-muscolari generali, che darebbero luogo alla categoria di nozioni riguardanti la teoria del continuo, la quale viene — dice F. Enriques: «...edificata sui concetti primi generalissimi di linea, superficie, varietà a più dimensioni, e dà luogo ad una ricerca critica preliminare, indipendente dalla proiettiva e dalla metrica».

Lo stesso F. Enriques riassunse la sua analisi nelle righe seguenti:

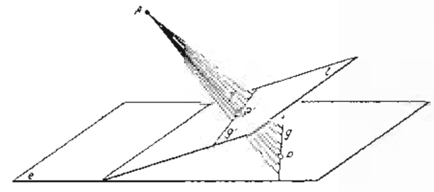
«I tre rami della Geometria, in essa differenziatisi, cioè la teoria del continuo, la Geometria metrica e la proiettiva, avuto riguardo all'acquisto psicologico dei loro concetti fondamentali, appaiono connessi a tre ordini di sensazioni: rispettivamente alle sensazioni generali tattili-muscolari, a quelle del tatto speciale e della vista».

Come si è visto, l'analisi di F. Enriques attribuisce la genesi dei concetti che portano alla Geometria euclidea elementare classica al dominio delle sensazioni tattili-muscolari; e invero capita ancora oggi di leggere delle frasi come la seguente: *Due figure si dicono uguali, quando, portate a sovrapporsi, coincidono.*

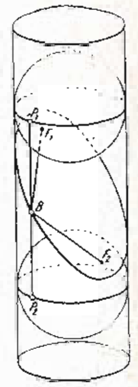
Ovviamente delle frasi come questa, od altre equivalenti dal punto di vista logico, si fondano sul concetto, ritenuto evidente, di corpo rigido e sul concetto, pure evidente, del trasporto di un corpo senza che questo cambi. È chiaro che quest'ultima clausola implica l'avere accertato che cosa significa «non cambiare», e ciò implica, a sua volta, la conoscenza del concetto di congruenza che la frase stessa pretenderebbe di definire. Il circolo vizioso che viene così ad instaurarsi deve quindi essere rotto in qualche modo; ciò è stato fatto con vari atteggiamenti, e qui ne ricorderemo soltano due fondamentali.

Il primo, assunto, per esempio, da D. Hilbert nella sua opera citata [14], conduce a definire in modo implicito, per postulati, la relazione di congruenza.

Il secondo conduce a precisare che cosa si intenda per «trasporto»: questa seconda strada fu seguita da H. Helmholtz, il quale espose le sue idee in alcune classiche memorie. Le idee di H. Helmholtz vennero ulteriormente sviluppate da F. Klein, il quale collegò la nozione di trasformazione geometrica con quella fornita dalla struttura algebrica di gruppo [15]. Le idee di F. Klein si rivelarono di estrema fecondità



Ampliamento del gruppo delle trasformazioni alle quali può essere sottoposta una figura. La proiezione.



e — a nostro parere — influenzarono anche l'impostazione che A. Einstein diede della relatività speciale e generale, utilizzando, tra l'altro, anche le ricerche e le idee di G. Ricci Curbastro e T. Levi Civita.

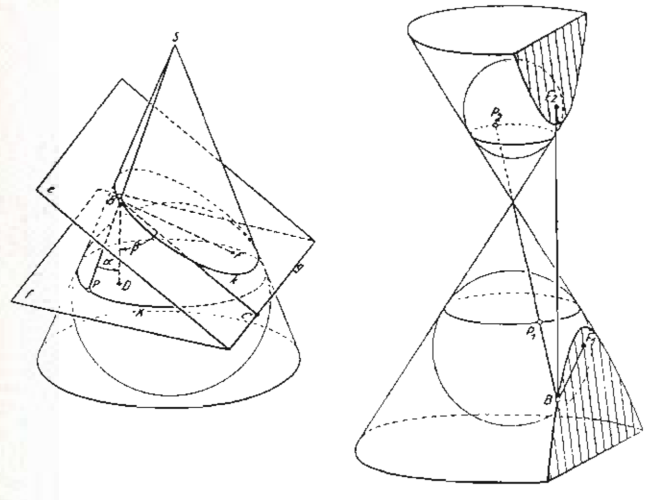
Del resto si potrebbe dire che questa corrente di pensiero è in stretto collegamento con la strada che già era stata imboccata da B. Riemann, nella sua celebre memoria dianzi citata [21]. Cercando di esprimere in forma grossolana ed approssimativa le idee di B. Riemann e quelle che erano in germe nella sua esposizione, si potrebbe dire che in questo atteggiamento non si prende posizione sulla totalità dello spazio geometrico, o, meglio, si distinguono i problemi riguardanti la porzione di spazio costituita dai punti vicini ad un punto dato da quelli che riguardano l'intero spazio; nell'intorno di ogni punto dello spazio si danno le regole per misurare la distanza tra due punti (abbastanza vicini) e l'angolo tra due direzioni: queste «geometrie» delle varie porzioni di spazio vengono poi «collegate» mediante adeguate leggi di raccordo, che danno l'effettiva struttura globale dell'insieme di tutti i punti che si considerano.

4) La «Geometria dello spazio fisico»

È appena necessario osservare che questi studi e gli sviluppi di queste idee hanno un collegamento molto stretto con il problema che qui ci interessa in modo particolare, cioè il problema del significato e della portata degli sviluppi della Geometria sulla conoscenza del mondo reale che ci circonda; problema che è stato spesso enunciato, in forma che — come abbiamo detto — rischia di essere fuorviante ed equivoca, come il problema della Geometria dello spazio fisico.

In questo ordine di idee — a nostro parere — è difficile dare un senso al problema che porta a domandarsi quale sia la «Geometria vera» dello spazio reale, cioè dell'insieme dei corpi materiali e dei fenomeni energetici che noi osserviamo e che cerchiamo di conoscere. A questo proposito pensiamo di poter condividere le idee che G. Fano esprime, a conclusione della sua esposizione sull'indirizzo elementare della Geometria non euclidea [9]. Scrive G. Fano:

«*I concetti geometrici, benché acquisiti a mezzo di elementi sensibili, sono puramente astratti. Non esiste nel mondo fisico nulla che corrisponda con precisione ai concetti astratti di retta e di triangolo; non si possono quindi "misurare" gli angoli di un triangolo (astratto), nè affermare che nello spazio fisico sia "verificata" una determinata geometria (astratta). Le proprietà di posizione e grandezza dei corpi possono essere rappresentate da una teoria astratta soltanto in modo più o meno approssimato*».



Una nuova visione di oggetti classici: le coniche, definite in origine come sezioni del cono rotondo, vengono considerate come proiezioni della circonferenza. Ne scaturisce la scoperta di nuove proprietà delle vecchie curve, proprietà definite in base agli invarianti per proiezione.

Ci pare di intravvedere qui una critica alle idee esposte da C.F. Gauss il quale aveva progettato una specie di *experimentum crucis* per decidere sulla validità o meno della Geometria euclidea nello «spazio reale»; tale esperimento avrebbe dovuto essere realizzato con la misura degli angoli di un triangolo molto grande. F. Enriques, già più volte citato, attribuisce [6, *i*] a C.F. Gauss il progetto di misurare gli angoli del triangolo avente come vertici Brocken, Hohenhagen ed Inselberg ed attribuisce a N. Lobatchewski, sulla scorta delle idee di F.K. Schweikart, il progetto di servirsi di triangoli astronomici.

Invero, poiché misure siffatte si potrebbero eseguire soltanto con osservazioni ottiche, pare a noi che questi esperimenti non possano portare a risultati conclusivi per quanto riguarda la Geometria.

Pensiamo che questa posizione concordi con quella espressa chiaramente da H. Poincaré, il quale ha affermato che: «nessuna esperienza ha come oggetto lo spazio o le relazioni dei corpi con lo spazio. Ma soltanto (la nostra esperienza) le relazioni dei corpi tra loro» (Cfr. H. Poincaré, *Science et Hypothèse* - citato da F. Enriques [6, *ii*]).

Di conseguenza la domanda: «la Geometria euclidea è vera?» per H. Poincaré è priva di senso. Al massimo ci si può domandare quale sia la Geometria più adeguata per descrivere le esperienze che noi eseguiamo sulla materia o sulla energia e sui loro spostamenti.

Del resto questa posizione era già stata presa da G.W. Leibnitz; invero, secondo le idee di questo filosofo: «...non vi è spazio assoluto reale, vale a dire che lo spazio non è qualche cosa di definito in sè, ma ha un senso relativo ai corpi, come "ordine delle coesistenze", così come il tempo è l'ordine delle successioni».

5) Le teorie fisico-matematiche

Il lettore si sarà accorto che noi condividiamo le tesi di H. Poincaré e di G.W. Leibnitz esposte fin qui; pensiamo infatti che solo così si ottenga il rispetto pieno dell'esperienza e del significato di una teoria fisico-matematica della realtà.

Invero, sempre secondo il pensiero di H. Poincaré, si può dire in generale di una teoria cosiffatta ciò che è stato detto della Geometria: non ha senso domandarsi se sia vera o falsa, ma soltanto se sia adeguata per descrivere in modo soddisfacente le nostre esperienze in un determinato momento della storia ed entro determinati limiti di approssimazione.

Pensiamo che da questo punto di vista, cioè nell'ambito di una sistemazione razionale e metodica delle nostre esperienze sui corpi rigidi, la Geometria si presenti come il primo capitolo della Fisica, cioè come il primo passo sul cammino della descrizione razionale e della deduzione rigorosa di quelle proprietà che ci interessano, sotto un certo punto di vista e per determinati fini.

Crediamo che si adatti al caso della teoria fisico-matematica il paragone della carta topografica: infatti ci serviamo di un mezzo siffatto per studiare una parte ristretta della superficie terrestre, mentre siamo ben consci di commettere degli errori perché, in forza di classici teoremi di Geometria differenziale, sappiamo bene che non è possibile applicare il piano sulla superficie sferica senza lacerazioni o duplicazioni.

Tuttavia sappiamo anche bene che lo strumento è atto ai fini pratici ed anche teorici a cui lo si destina entro determinati limiti di approssimazione, che dipendono dal problema che si sta considerando.

Pertanto pensiamo che non vi sia nulla di contraddittorio nell'utilizzare diverse «Geometrie», cioè diversi sistemi, per descrivere i fenomeni che riguardano la materia o l'energia, perché siamo ben consci del fatto che nessuna di esse può pretendere di dire tutta la verità su certi fenomeni, ma che di volta in volta va scelta quella più adeguata per razionalizzare le relazioni spaziali dei corpi e degli stati di energia e per dedurre le conseguenze, prevedendo in modo coerente i risultati delle esperienze future.

Tutto ciò ci sembra perfettamente consono con quel «postulato di comprensibilità del reale» che F. Enriques riconosce come fondamento essenziale per basare ogni tentativo di spiegazione scientifica della realtà [6, *ii*].

Pensiamo che questo atteggiamento sia rigoroso e rispettoso della esperienza e del metodo scientifico rettamente inteso, ma ci rendiamo conto, tuttavia, che esso può presentare qualche difficoltà a chi sia solito attribuire agli enunciati della scienza un valore assoluto e definitivo, cioè a chi assuma di fronte alla scienza un atteggiamento che vorremmo chiamare euclideo-newtoniano.

Crediamo che si possa comprendere l'origine di un atteggiamento cosiffatto, ed anche il suo permanere nelle menti di molti, quando si tenga conto dell'importanza che ha la fantasia elaboratrice, creatrice e trasformatrice nella costruzione della nostra immagine del mondo.

Non intendiamo estendere la nostra analisi a tutto il pensiero scientifico, e vorremmo quindi limitarci ad analizzare il caso della Geometria e della Fisica.

6) Le fasi della costruzione di una teoria

A questo proposito pensiamo sia legittimo ritenere che, nella costruzione di queste scienze, sia utile, per non dire addirittura necessario, distinguere tre fasi della costruzione di una teoria: una prima fase che consiste nella percezione della realtà sensibile; la assoluta necessità di questa fase della cognizione umana viene codificata nel classico detto: *Nihil est in intellectu quod prius non fuerit in sensu.*

La seconda fase consiste nella elaborazione fantastica della immagine fornita dai sensi, elaborazione che fornisce all'intelletto il materiale per la costruzione intellettuale. Questa costituisce la terza fase, che si realizza nella concezione delle idee e nella loro espressione, verbale o simbolica.

Nel caso della Geometria si potrebbe prendere in considerazione, per esempio, il concetto di punto e la sua nascita, identificando anzitutto la prima fase con la percezione di un corpicciolo molto piccolo. È chiaro che questa espressione ha un significato essenzialmente soggettivo e relativo: perché un granello di sabbia, per esempio, può essere considerato molto piccolo se rapportato ad un monumento e molto grande se introdotto nel delicatissimo meccanismo di un orologio di precisione. Nel secondo momento la fantasia elabora i dati della percezione, costruendo l'immagine di un oggetto sempre più piccolo, indefinitamente piccolo. Ovviamente questa elaborazione fantastica non è ancora la costruzione del concetto di punto, ma ne è un momento essenziale; la definizione del concetto di punto geometrico giunge a compimento quando si esprimono con mezzi linguistici, e non con immagini, i rapporti logici che il concetto determina e dai quali viene a sua volta determinato. In altre parole, la definizione del concetto di punto può venir considerata completa quando si enunciano delle frasi che riconducono il concetto stesso ad altri già conosciuti, oppure quando si dia un insieme di proposizioni primitive, le quali conducano alla definizione implicita del concetto stesso.

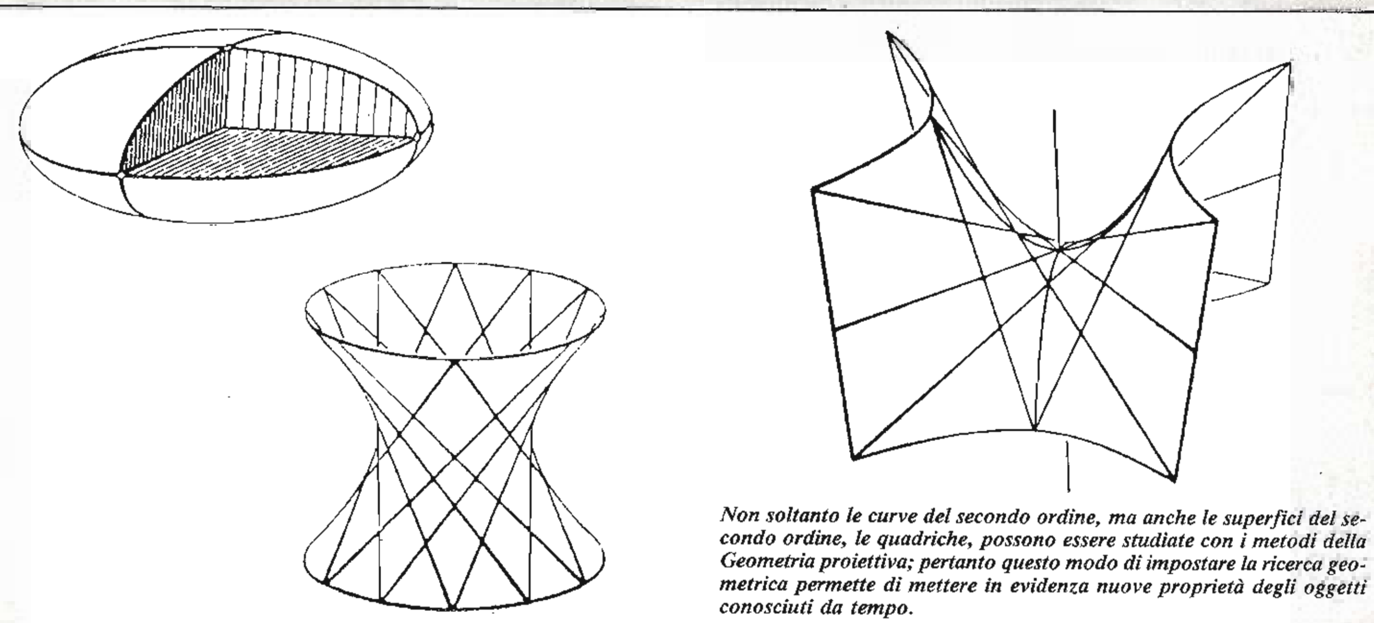
Riteniamo che un'analisi analoga possa essere svolta a proposito di ogni concetto di cui si serve la Geometria; a questo proposito pensiamo sia di particolare interesse l'esempio offerto dal concetto di continuo geometrico. È noto che tale concetto è molto complesso e che è stato definito e formulato rigorosamente in forma soddisfacente e chiarito sino in fondo soltanto dalle analisi del secolo XIX e del secolo XX. Rifacendoci alle idee di F. Enriques che abbiamo già esposto (Cfr. sopra, § 3), riteniamo di poter affermare che esso ha una radice sperimentale e ha la sua origine nelle sensazioni dei nostri sensi (vista e tatto), i quali, a causa delle loro limitazioni, non percepiscono la struttura granulare della materia, struttura che ci è presentata teoricamente e sperimentalmente dalla Fisica moderna. La fantasia integra ed elabora queste sensazioni limitate dei sensi facendo una extrapolazione che non contraddice, ma completa ed integra i dati sensibili. Si giunge così alla formulazione teorica rigorosa, la quale avviene (sui dati della fantasia che ha elaborato i dati sensibili) mediante strumenti concettuali e linguistici che utilizzano per l'espressione dei concetti le parole del linguaggio comune oppure i simboli dell'analisi matematica.

Per fare un altro esempio, possiamo pensare che la vista di un filo teso sia il fondamento su cui la fantasia elabora il concetto di retta indefinitamente prolungabile, la quale viene poi definita implicitamente in modo rigoroso mediante un sistema di assiomi o di postulati. In modo analogo possiamo pensare che la vista di uno specchio o di una superficie di lago calmo sia il punto di partenza sul quale si appoggerà la costruzione del concetto di piano. Ma il fatto che questa immagine sia estesa indefinitamente fuori della portata delle nostre attuali possibilità di osservazione è ovviamente frutto della fantasia e non è convalidato da alcuna esperienza concreta; anzi, se volessimo fare l'esperienza di procedere sempre nella stessa direzione lungo questo specchio d'acqua, troveremmo che esso non risponde affatto alla definizione di piano della Geometria euclidea e soprattutto non risponde a quella immagine che la fantasia ci offre di questo ente.

Volendo cercare di riassumere, almeno sommariamente, quanto è stato detto fin qui, potremmo dire che gli oggetti di questa dottrina che abitualmente viene chiamata Geometria non sono completamente frutto della fantasia, ma certo anche risultati dell'opera di questa nostra facoltà; pertanto lo spazio, questo ente immenso, oscuro e vuoto, che viene abitualmente immaginato, è costruito dalla fantasia sulla base di sensazioni più o meno univoche o precise e viene poi fatto oggetto di una dottrina deduttiva, quando le proprietà degli enti che si immaginano in esso contenuti sono formulate in modo preciso mediante postulati.

Queste considerazioni sono abbastanza semplici ed addirittura banali, ma mostrano tutta la loro importanza quando si voglia applicare la Geometria che abbiamo costruito alla conoscenza degli oggetti della natura ed in particolare a quelli che vengono tradizionalmente considerati come gli oggetti della Fisica, che è la più matematizzata tra le scienze della natura. Invero in questo caso nulla vieta che noi utilizziamo gli schemi teorici che ci sono forniti dall'una oppure dall'altra delle Geometrie che l'uomo ha costruito per spiegare — nei limiti del possibile — le cose che noi osserviamo. Ma nessuno può pretendere che vi siano delle proprietà geometriche «intrinseche» dello spazio fisico, perché ovviamente le proprietà che osserviamo e che deduciamo sono quelle degli enti che guardiamo, tocchiamo e misuriamo in qualche modo.

In altre parole, a nostro parere, l'esperienza è fonte e radice di una operazione di «astrazione» che viene compiuta dalla fantasia con un lavoro di extrapolazione e di eliminazione, di oblio e di astrazione (nel senso etimologico del termine) che conduce quegli oggetti dei quali poi parleranno le proposizioni iniziali (*postulati*) ed i teoremi della Geometria propriamente detta.



Non soltanto le curve del secondo ordine, ma anche le superfici del secondo ordine, le quadriche, possono essere studiate con i metodi della Geometria proiettiva; pertanto questo modo di impostare la ricerca geometrica permette di mettere in evidenza nuove proprietà degli oggetti conosciuti da tempo.

II. GEOMETRIA E LOGICA

1) I problemi logici della Geometria

Nel cap. I non abbiamo potuto evitare di toccare alcuni problemi che riguardano i rapporti tra la Geometria e la logica; tuttavia abbiamo dato di questi problemi un cenno di sfuggita, perché ci ripromettevamo di approfondirne l'analisi in questa sede. In particolare qui prenderemo in considerazione i rapporti tra la Geometria e la logica da vari punti di vista. Anzitutto richiameremo i problemi logici che riguardano i fondamenti della Geometria, e le ricerche che questi problemi hanno originato. In secondo luogo cercheremo di analizzare i vari strumenti deduttivi, i vari 'calcoli geometrici' che la Geometria ha utilizzato ed utilizza ancora per le proprie deduzioni: infine diremo qualche cosa dei problemi logici del continuo, e della procedura che conduce a dare una immagine numerica di questo oggetto della Geometria.

Vorremmo tuttavia osservare, in linea preliminare, che in teoria non si vedono le ragioni per cui la logica debba avere con la Geometria dei rapporti particolari e più stretti, rispetto a quelli che ha con un'altra scienza: la logica, infatti, come dottrina che studia le procedure perché la deduzione sia corretta ed efficace, fornisce i suoi strumenti tanto alla Geometria che a qualunque altra scienza che ne abbia bisogno. Sta di fatto tuttavia che, anche nella opinione comune, sembra che la Geometria abbia con la logica dei legami privilegiati, tanto che spesso il ragionamento particolarmente corretto e rigoroso si dice condotto *more geometrico*, come abbiamo già ricordato (Cap. I, § 2).

Ciò è forse dovuto alla grande chiarezza degli oggetti studiati dalla Geometria, talché il ragionamento deduttivo sembra confermare e rendere assolutamente certo ciò che già «si vede» e che sembra poter essere anche oggetto di percezione immediata.

Non intendiamo ritornare sulle analisi psicologiche di cui abbiamo già dato notizia; ci limitiamo ad osservare qui che, anche dal punto di vista storico, il primo teorema geometrico degno di questo nome, e cioè la proposizione che viene attribuita a Pitagora, costituisce una affermazione della logica sulla esperienza.

Infatti una delle sue conseguenze immediate è l'accertamento della esistenza di coppie di segmenti incommensurabili tra loro (come il lato e la diagonale di uno stesso quadrato), e questa conseguenza potrebbe anche essere considerata come l'accertamento della non esistenza di un atomo di spazio geometrico 'di un elemento' che, ripetuto un numero intero di volte, possa dare una volta il lato ed una seconda volta la diagonale del medesimo quadrato: invero, comunque piccolo si immagini questo elemento supposto esistente, questa operazione non sarà mai possibile. Ma questa conquista del ragionamento sulla esperienza, anzi su ogni esperienza eseguibile, è dovuta alla deduzione e quindi, in ultima analisi, alla logica.

E si noti che questo teorema astratto contraddice l'esperienza concreta della Fisica: questa infatti afferma che esiste un 'atomo' di materia; ma la immaginazione geometrica è qualche cosa di diverso dall'esperienza della Fisica, e questa scienza è qualche cosa di diverso dalla logica pura.

2) Il problema dei fondamenti della Geometria e la scelta dei sistemi di postulati

Abbiamo già osservato (Cfr. Cap. I, § 2) che l'invenzione delle Geometrie non-euclidee, e soprattutto la conquista della certezza della loro compatibilità logica, ha dato origine a molti progressi nella logica, ed ha stimolato quella ricerca sui fondamenti della Matematica che ha portato questa scienza al suo assetto moderno. In particolare noi pensiamo che proprio in conseguenza della crisi provocata dalla esistenza delle Geometrie non-euclidee, la Geometria assunse l'aspetto che ha oggi, di una teoria astratta che ha meritato il nome di «Sistema ipotetico-deduttivo» che le ha dato M. Pieri [20]: cioè l'assetto di un sistema logico nel quale i postulati non pretendono di essere delle proposizioni che dicono la verità sul mondo esterno, ma vogliono essere semplicemente delle ipotesi, dalle quali vengono dedotte le conseguenze per pura forza di logica e non per intuizione della realtà delle cose.

Vorremmo ripetere che, a seguito della crisi indotta in tutta la Matematica dal processo di revisione dei fondamenti della Geometria, è finalmente risultato chiaro, ai logici ed ai matematici, il fatto che non è possibile definire tutto e che soprattutto i concetti fondamentali di una teoria debbono essere dati con quelle che vengono abitualmente chiamate «definizioni per postulati» o anche «definizioni implicite» o ancora «definizioni d'uso». In altre parole, è solo possibile enunciare delle proposizioni che contengono i termini da definire: proposizioni che, nel loro insieme, costituiscono la definizione implicita dei termini stessi, ed insieme anche di tutti gli altri simboli linguistici che sono impiegati nella teoria che si espone.

La coscienza della ineliminabilità delle definizioni per postulati degli enti di cui tratta la scienza è oggi accompagnata dal riconoscimento delle necessità di enunciare chiaramente ogni proposizione che verrà utilizzata nel seguito in modo che ogni teorema, ogni proprietà dedotta, siano fondati in modo ineccepibile; cioè non su sensazioni o su pretese «intuizioni» ma solo sulle proposizioni esplicitamente e coscientemente enunciate come primitive, e quindi non dimostrate, e chiamate «postulati» alla maniera di Euclide (cioè richieste di assenso) oppure «assiomi» oppure addirittura «ipotesi».

La distinzione può apparire sottile, ma rivela forse una notevole diversità tra gli atteggiamenti dei ricercatori interessati: infatti dal dare il nome di «assiomi» alle proposizioni primitive (come oggi si usa), al chiamarle postulati, ed infine al chiamarle «ipotesi» vi è tutta una gamma di sfumature che coinvolgono anche il modo di concepire la teoria geometrica ed il suo significato. Si potrebbe infatti pensare che nel primo caso si manifesti talvolta una specie di ingenuo realismo, che ammette la esistenza della Geometria come dottrina di cose realmente e materialmente presenti alle nostre sensazioni, solo in certo modo purificate ed idealizzate dalle operazioni della nostra fantasia e della nostra mente; nel caso in cui le proposizioni primitive vengono chiamate «postulati» si potrebbe intravedere un atteggiamento di non imposizione delle proprie sensazioni, di rispetto per l'osservatore, il quale non viene costretto ad accettare gli enunciati in forza della loro presunta evidenza, ma semplicemente viene posto di fronte a questi, con la richiesta di accettarli. Infine nel terzo caso, in cui le proposizioni primitive vengano chiamate «ipotesi», gli enunciati riguardano soltanto dei concetti, o addirittura dei simboli (come ha osservato U. Cassina [5, *i, ii*]); i teoremi sono soltanto delle proposizioni (o addirittura delle successioni di simboli) dedotte con determinate regole da quelle che sono state presentate come primitive.

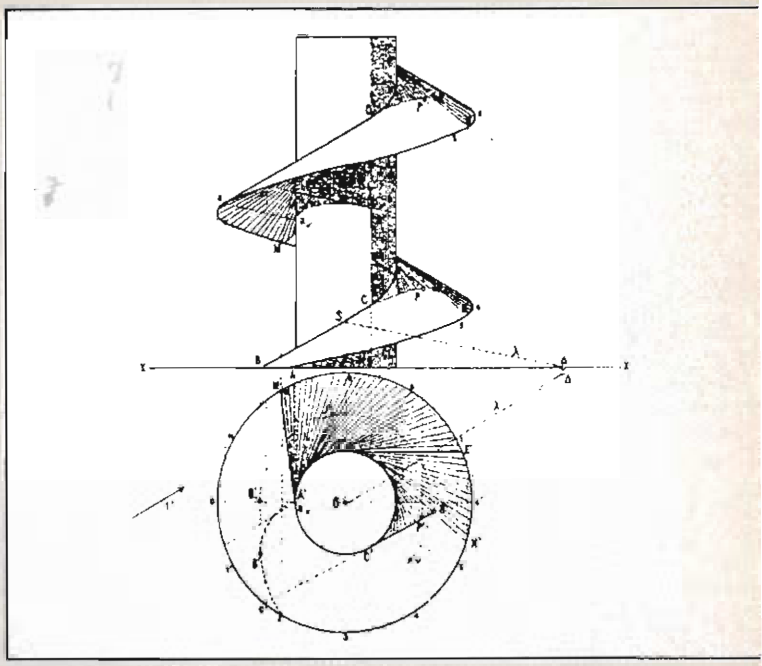
Pertanto, in quest'ultimo atteggiamento, una realtà qualesivoglia, eventualmente esistente fuori del soggetto che deduce, viene considerata solo come un insieme di possibili 'modelli', che forniscono dei riferimenti concreti ai simboli introdotti, e dei contenuti (beninteso rudimentali ed approssimati) alle proposizioni che si enunciano o si dimostrano.

Non ci è possibile presentare qui tutti i sistemi di postulati che sono stati scelti per fondare la Geometria; ci limiteremo quindi a far cenno dei sistemi escogitati da due grandi matematici: D. Hilbert e G. Peano.

Anzitutto, per quanto riguarda il sistema di postulati proposto da D. Hilbert nella sua classica opera sui fondamenti della Geometria, ci pare di poter osservare che il grande matematico tedesco curò in certo modo una graduazione nella 'complicazione' dei postulati, quasi cercando di stabilire la successione delle proposizioni primitive a seconda della complicazione delle esperienze concrete dalle quali i postulati prendono la loro origine. Troviamo quindi in Hilbert cinque sistemi di postulati che riproducono in qualche modo il cammino della intuizione geometrica nella costruzione della Geometria come scienza che tratta anche di una certa realtà esteriore.

Una preoccupazione analoga era presente anche a G. Peano, il quale afferma esplicitamente che il compito del trattatista di Geometria è quello di prendere le mosse dalle esperienze più semplici sul mondo esterno e di enunciarle nella forma più elementare possibile.

Ci pare di poter osservare che l'esempio di Peano non fu seguito da altri matematici che si possono ricollegare alla sua scuola; per esempio non fu seguito pienamente da M. Pieri, il quale ha dato vari sistemi di proposizioni primitive, tanto per la Geometria elementare che per la Geometria proiettiva, ma ha cercato di raggiungere l'ideale di costruire l'universo della Geometria con il minimo numero di enti primitivi. Egli giunge così a delle trattazioni teoriche che hanno il pregio di una grande eleganza logica, ma che forse non si legano alla realtà dell'esperienza sul mondo reale come quelle di Hilbert e di Peano.



3) La compatibilità dei postulati e la «esistenza» degli oggetti della Geometria

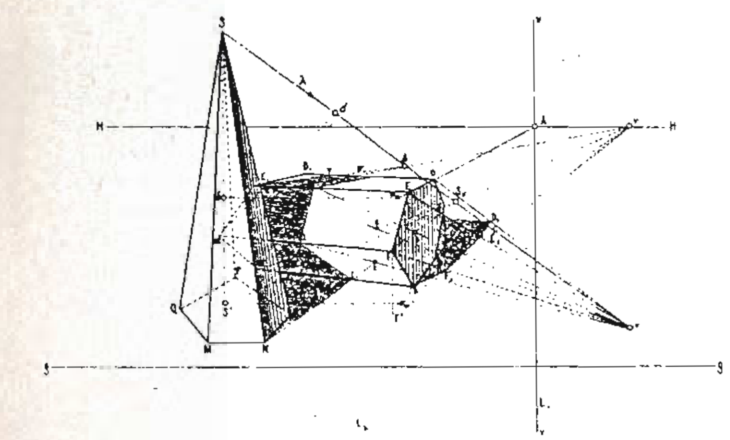
L'esistenza di vari sistemi di postulati, enunciati a fondamento della Geometria, rende evidente una circostanza che ha un grandissimo rilievo nei rapporti di questa scienza con la logica: precisamente rende evidente il fatto che la scelta dei postulati è in certa misura libera: U. Cassina si spinge fino ad affermare che tale scelta è «...un atto di imperio del trattatista» [5 *i, ii*], il quale è libero di scegliere la strada che di volta in volta ritiene più opportuna, in vista della propria formazione culturale, dei propri gusti, dello scopo didattico che vuole conseguire.

Occorre tuttavia ricordare che questa libertà non è assoluta, perché è limitata dalla esigenza che il sistema di postulati che si enunciano sia non contraddittorio, ovvero — come si usa dire — sia compatibile. Ed invero, accanto alla libertà di scelta dei punti di partenza, si afferma anche la necessità di accertare il fatto che le proposizioni liberamente scelte non contengano una contraddizione nascosta, che si potrebbe rendere palese nel corso delle deduzioni, infirmando così tutta la validità della costruzione teorica che si è cercato di fondare sul rigore assoluto dei punti di partenza. D'altronde ci pare che sia questo l'atteggiamento che ispirò il tentativo fatto, nel secolo XVII, da G. Saccheri, per dimostrare per assurdo la validità del postulato euclideo della parallela [22]; tentativo che ha, tra gli altri suoi pregi, anche quello di aver mostrato la fede che l'autore aveva nella potenza del ragionamento e della logica. Infatti Saccheri si propose di dimostrare il postulato euclideo della parallela, pensando che nella ipotesi «dell'angolo acuto» che egli enunciò, fosse nascosta una contraddizione, che egli cercò di mettere in evidenza con gli sviluppi delle deduzioni.

È ovvio che il problema della coerenza delle proposizioni primitive non era mai stato posto quando la Geometria era considerata come una scienza caratterizzata dai propri contenuti, e quando si pensava che la validità dei postulati fosse garantita dalla evidenza dei loro enunciati, e dai riferimenti esterni a questi. In questo caso infatti il riferimento ad una realtà esterna (anche soltanto «ideale» nel senso platonico del termine) garantiva la coerenza dei postulati enunciati, con riferimento ad una coerenza (ovviamente accettata in modo quasi implicito e non pienamente cosciente) di quella realtà di cui si parlava. Ma, quando si abbandona questa posizione, il problema di garantire la coerenza interna delle proposizioni che si assumono come punti di partenza, o addirittura come ipotesi, diventa preciso e non eludibile. Il problema di cui abbiamo detto or ora, cioè quello di garantire la compatibilità del sistema di postulati che si enunciano a fondamento della Geometria, si è presentato in forma più o meno esplicita a tutti i costruttori di teorie geometriche, a seconda della finezza del loro spirito critico e della acutezza della loro analisi, ed è stato risolto con vari atteggiamenti. Oggi, dopo i risultati di K. Gödel, appare chiaro che è impossibile sperare che la risposta al problema possa essere data in termini puramente formali, o in termini di logica deduttiva, nel senso classico della parola.

La soluzione che Hilbert dà del problema della compatibilità dei postulati della Geometria consiste nel costruire dei contenuti dei postulati, dei modelli della teoria, mediante enti presi da altri capitoli della Matematica; è chiaro che in questo atteggiamento il problema non viene risolto fino al fondo, ma semplicemente scaricato sugli altri capitoli della Matematica con i quali vengono costruiti i modelli, capitoli ai quali viene demandato il compito di garantire o di assicurare i propri fondamenti. A questo punto la discussione sconfina nella problematica filosofica, perché ci conduce ad analizzare che cosa si intende indicare con il verbo «esistere»; il che del resto rimanda alla concezione platonica, ed alla «realtà» degli enti astratti dalla realtà concreta, materiale e tangibile.

Non intendiamo qui affrontare questa complessa problematica, e ci limitiamo a ripetere che, ovviamente, anche la questione della «esistenza» degli enti di cui tratta la Geometria è nata — in questo senso — soltanto all'epoca di una critica matura, perché tale questione non avrebbe senso nell'atteggiamento classico della Geometria. Pare chiaro infatti che, per Euclide, e per tutti i geometri sino alla fine del secolo XVIII, non avesse senso domandarsi se gli enti di cui essi parlavano esistessero oppure no: perché — ripetiamo — la Geometria veniva considerata come una scienza avente dei contenuti reali, almeno in un certo senso; e non ostava a questa concezione l'atteggiamento platonico, secondo il quale gli oggetti della Geometria esistevano non nella materialità delle figure tracciate sulla sabbia dai matematici, ma nel mondo delle idee [10, *i*]; invero la realtà di questa esistenza delle figure non riguardava la tangibilità materiale degli oggetti, ma la coerenza interna delle proposizioni che parlavano di questi oggetti, coerenza che si pensava ovviamente garantita dalla esistenza (materiale o ideale non importa) degli oggetti stessi.



Il problema di rappresentare fedelmente gli oggetti esistenti nello spazio tridimensionale su un piano o su una qualunque superficie si era già presentato ai pittori del Rinascimento italiano; agli inizi del secolo XIX la Geometria proiettiva rese possibile lo studio metodico delle proprietà delle rappresentazioni delle figure. Venne creata una speciale branca della Geometria, che fu chiamata «Geometria descrittiva», e che applicò sistematicamente i metodi della Geometria proiettiva.

La posizione di Peano e dei ricercatori della sua scuola nei riguardi del problema della esistenza degli enti della Geometria è lievemente diversa da quella di Hilbert. Infatti Peano e specialmente i suoi seguaci tengono ad affermare esplicitamente che la classe degli enti che si considerano (quella dei «punti» in particolare) non è vuota; Peano, per parte sua, dice qualche cosa di più sfumato: dopo aver parlato della esperienza concreta e materiale che ci porta a parlare dei punti egli afferma che «Si può segnare un punto» [19, *i, ii*]. In altre parole, egli non afferma la esistenza di questo ente ideale, anzi immaginario, ma semplicemente si limita ad affermare che è possibile una esperienza concreta (anche se elaborata in seguito dalla fantasia) che porta a costruire il concetto di punto.

Riteniamo che la posizione di Peano sia la più coerente ed accettabile. Infatti la affermazione pura e semplice della esistenza di punti non ha la forza di creare questi enti, perché non esclude che le proposizioni primitive che verranno enunciate in seguito possano essere tra loro contraddittorie e quindi possano distruggere la costruzione di cui si cerca di assicurare le fondamenta: in altre parole, ci sembra di poter dire che la affermazione della esistenza di certi enti ideali, la cui essenza sta nella definizione implicita che se ne dà mediante postulati, non costituisca per sè un accertamento di non contraddizione del sistema dei postulati stessi. Invece l'atteggiamento di Peano ci pare più prudente, perché egli si limita ad affermare la possibilità di certe esperienze; e ciò in coerenza con il programma che Peano stesso aveva enunciato all'inizio della sua opera geometrica, dicendo che compito della scienza è quello di osservare la realtà, enucleare le osservazioni più semplici che costituiscono la nostra esperienza del mondo esterno, e poi enunciarle in forma chiara.

4) Il momento deduttivo della Geometria

Le questioni riguardanti i fondamenti della Geometria non sono le sole che toccano i rapporti tra questa scienza e la logica; si potrebbe anzi dire che esse sono tra le ultime che si sono imposte alla attenzione dei ricercatori. Invece, fino dai tempi della Matematica greca, sono state studiate con particolare attenzione le questioni che riguardano le procedure di deduzione, per la dimostrazione dei teoremi e le procedure di ricerca delle soluzioni dei problemi geometrici.

A questo proposito, ci sembra opportuno ricordare che, dal punto di vista didattico, la Geometria ha offerto tradizionalmente la palestra forse più interessante e stimolante di esercizio della logica, per gli studenti che debbono essere educati alla ricerca ed al ragionamento.

Ritorneremo in seguito su questo argomento; qui vorremmo ricordare che la Geometria ha dato lo spunto, fino dall'epoca della civiltà greca, alla analisi dei procedimenti deduttivi della nostra mente, ed anche all'approfondimento delle procedure con cui l'uomo giunge alla certezza. Uno dei procedimenti che viene utilizzato più frequentemente è quello che viene chiamato «analisi» [24] e che viene mirabilmente descritto da Pappo di Alessandria all'inizio del libro VII delle sue *Collezioni*. Noi lo presentiamo qui con le parole di F. Enriques, che scrive: «La scuola di Platone, e poi di Eudosso, dà un particolare significato logico e metodologico al procedimento "analitico" che si mette in opera nella risoluzione dei problemi geometrici.

In questa "analisi" si comincia col supporre che il problema proposto *P* sia risoluto, e si deducono successivamente le condizioni a cui debbono soddisfare gli elementi cercati, trasformando il problema dato in una serie di problemi, ciascuno dei quali venga risoluto in forza del precedente, finché si arrivi ad un problema *R* che si sappia effettivamente risolvere. La 'sintesi' consiste nel partire dalla soluzione di quest'ultimo problema *R*, e dedurne via via la risoluzione della nostra catena di problemi in ordine inverso, fino a dimostrare la soluzione di *P*. Questa dimostrazione è necessaria, perché coll'analisi si è dimostrato soltanto che le soluzioni di *P* sono soluzioni di *R* ma non viceversa. Insomma l'analisi è una decomposizione ideale del concetto della figura da costruire, nelle condizioni, proprietà o note che lo determinano (ed è quindi in rapporto con la teoria platonica delle Idee). Essa appare come un procedimento di generalizzazione dei problemi. L'opposto si può dire della sintesi, la quale — da sola — fornisce certo soluzioni del problema proposto, ma non tutte.

Il significato greco dell'analisi dei problemi geometrici si è evoluto nel progresso moderno delle scienze matematiche; su questa evoluzione sembra aver influito massimamente il fatto che il metodo di risoluzione detto dei "luoghi geometrici" è divenuto, con Cartesio, il fondamento d'un'applicazione sistematica dell'algebra alla Geometria.

Nella trattazione algebrica si è vista soprattutto la decomposizione delle condizioni del problema in condizioni elementari, espresse da equazioni. Perciò il metodo cartesiano ha ricevuto il nome di "Geometria analitica", e poi tutta l'algebra con il calcolo differenziale ed integrale in cui si prolunga ha preso il nome di "analisi matematica". Con questo nome i moderni riconoscono, in qualche modo, nella più generale scienza dei numeri e delle equazioni, l'organo delle matematiche, che permette di analizzare e ricondurre ad una forma comune più generale, tutti i problemi di Geometria, di Meccanica ecc. [6, *iii*]».

5) La Geometria analitica

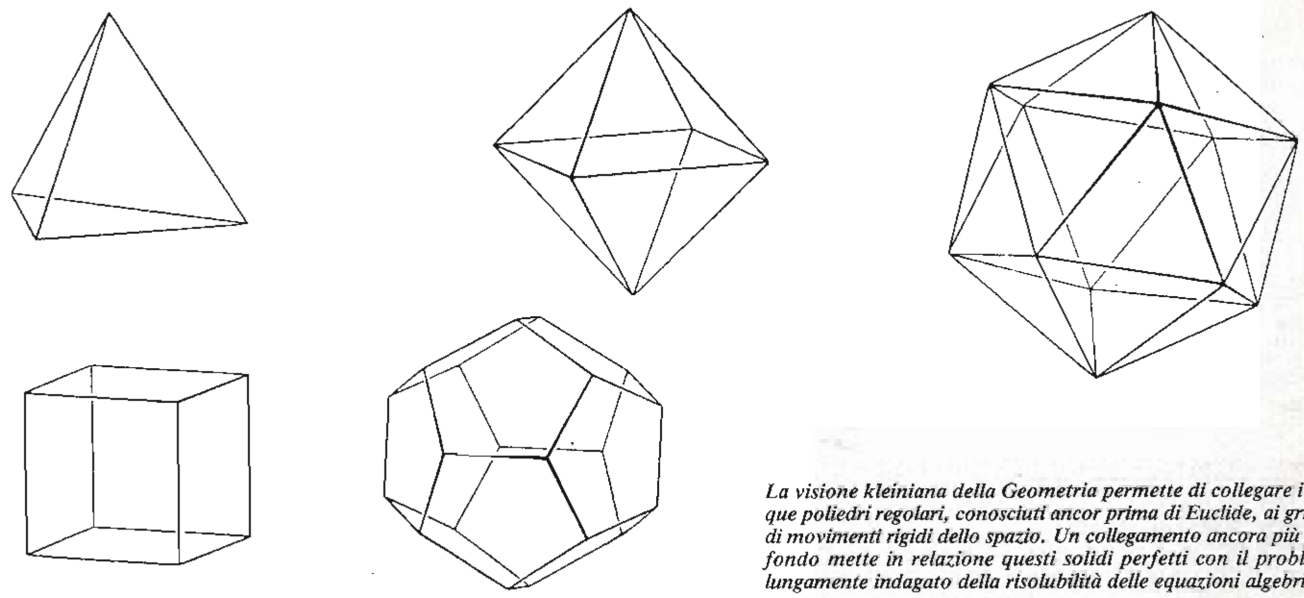
Le brevi considerazioni che abbiamo svolto nel precedente paragrafo mostrano quanto grande sia l'importanza del procedimento deduttivo nella Geometria, ed insieme giustificano in qualche modo quella specie di rapporto preferenziale tradizionale tra la logica e la Geometria di cui abbiamo detto.

In questa luce vorremmo vedere il significato dei vari metodi di deduzione che sono stati inventati e messi — per così dire — al servizio della Geometria e dei suoi problemi.

Dal punto di vista storico, il primo metodo di questa natura è certamente la «Geometria analitica» che costituisce, a nostro parere, una delle invenzioni più importanti della storia scientifica del secolo XVII. Invero questa dottrina si presenta anzitutto come un metodo e come un insieme di convenzioni per rappresentare gli elementi geometrici (punti, rette, piani, luoghi geometrici ecc.) mediante opportuni procedimenti, che fanno corrispondere ad essi degli enti dell'algebra: insiemi di coordinate, equazioni di luoghi, o altre relazioni matematiche che rappresentano opportunamente degli insiemi di punti aventi certe determinate proprietà.

Ma la rappresentazione convenzionale biunivoca degli enti geometrici è soltanto la fase iniziale dell'applicazione del metodo: il momento più importante è quello in cui si applicano le leggi dell'algebra (o addirittura della analisi matematica) alle relazioni così ottenute per dedurre da esse altre relazioni, che sono le loro conseguenze necessarie e quindi per in forza della corrispondenza biunivoca che è stata stabilita dalle convenzioni di rappresentazione.

Ricordiamo infine ciò che è stato detto da F. Enriques nel passo che abbiamo citato: molto spesso, quando si utilizzano i metodi della Geometria analitica, non tutte le soluzioni del problema algebrico hanno un significato geometrico, perché spesso le operazioni di calcolo conducono ad equazioni, o in generale a relazioni, che sono soltanto delle conseguenze dei dati e delle domande del problema e che non sono ad esse perfettamente equivalenti. Pertanto occorrerebbe, ogni volta che si trovano le soluzioni per via analitica, dimostrare che esse sono tutte anche soluzioni del problema geometrico, oppure distinguere tra quelle che lo sono e quelle che non lo sono; in questo consiste il procedimento che in certa trattatistica elementare viene chiamato di «discussione» delle equazioni algebriche e delle loro soluzioni.



La visione kleiniana della Geometria permette di collegare i cinque poliedri regolari, conosciuti ancor prima di Euclide, ai gruppi di movimenti rigidi dello spazio. Un collegamento ancora più profondo mette in relazione questi solidi perfetti con il problema lungamente indagato della risolubilità delle equazioni algebriche.

dedurre, dalle proprietà supposte vere (e trascritte mediante le convenzioni accennate), altre proprietà più riposte e giungere infine alle coordinate degli elementi che sono le soluzioni dei problemi posti.

In questa luce, i procedimenti dell'algebra si presentano come vere e proprie leggi di deduzione, cioè dei procedimenti che sono usati per trasformare certi insiemi di simboli (che esprimono certe verità nei confronti degli oggetti rappresentati) in altri insiemi di simboli, che pure esprimono delle verità. Si intravede qui il germe della evoluzione della logica, evoluzione che porterà questa dottrina, o almeno una parte di essa, alla forma simbolica che oggi possiede; si giustifica anche, in questo ordine di idee, il giudizio che G. Peano dava della Matematica, chiamandola una «logica perfezionata».

È appena necessario osservare che la potenza di questo insieme di metodi favorì un progresso imponente della Geometria; ricordiamo a questo proposito che lo stesso Cartesio si mostra ben cosciente di questo fatto; egli infatti, alla fine della sua esposizione, mette in evidenza il valore delle idee che egli ha presentato, ed il loro valore in quanto «metodo», cioè non soltanto per le scoperte che egli ha potuto fare personalmente utilizzando i suoi procedimenti, ma soprattutto per quelle che essi permetteranno di fare in futuro.

È anche vero tuttavia che spesso la utilizzazione dei metodi della Geometria analitica, ed in particolare dell'algebra, per la soluzione dei problemi geometrici non permette di seguire ad ogni passo il procedimento che conduce alla soluzione di un dato problema, perché l'algebra giunge ai propri fini con i propri mezzi, e per cammini ovviamente diversi da quelli della Geometria; ne consegue che il ricercatore si trova — per così dire — ad avere in mano la soluzione di un problema senza che egli ne veda direttamente il collegamento logico con i dati; collegamento che naturalmente esiste,

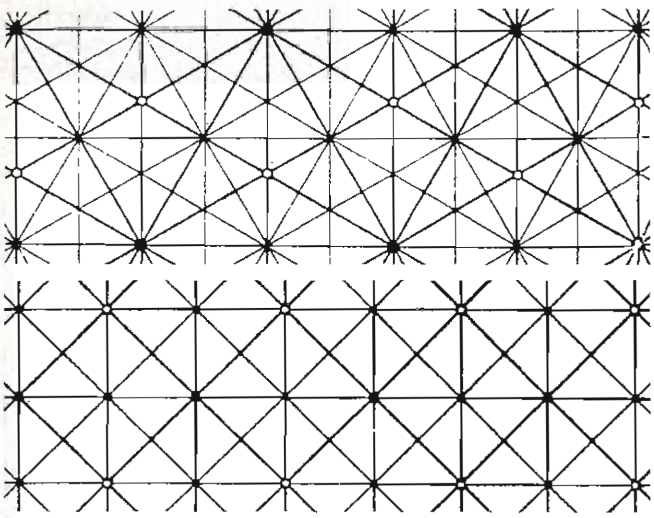
6) I metodi di «calcolo geometrico»

Abbiamo brevemente analizzato il significato e la portata dei metodi della Geometria analitica nella dimostrazione di teoremi e nella risoluzione di problemi geometrici; vorremmo qui svolgere altre considerazioni, ricollegandoci ad un aspetto del metodo che abbiamo cercato di analizzare: precisamente l'aspetto secondo cui l'algebra ci si presenta come uno strumento logico di deduzione.

A questo proposito si può osservare che, nelle ordinarie applicazioni dei metodi della Geometria analitica, entra un elemento di arbitrarietà, dato dal sistema di riferimento che si deve scegliere per rappresentare gli oggetti della Geometria e quindi per tradurre le loro relazioni ovvero — come si usa dire — per «mettere in equazione» il problema.

Della libertà nella scelta del riferimento può trarre partito il ricercatore esperto, per semplificare i calcoli e per verificare in vari modi la validità di questi e l'assenza di errori materiali nella deduzione: per esempio, la scelta di un sistema di coordinate polari invece delle cartesiane classiche può condurre a mettere in evidenza certe simmetrie e spesso a semplificare i calcoli in maniera utilissima. Si osserva tuttavia che, quando i metodi di Geometria analitica vengano utilizzati per la dimostrazione di teoremi, occorrerebbe, a rigore, mostrare che i risultati ottenuti sono indipendenti dalla scelta — a priori arbitraria — del sistema di riferimento; verifica che non sempre viene fatta, perché la cosa appare evidente dal significato «geometrico» che si dà ai numeri che si ottengono o alle soluzioni dei problemi algebrici. Si potrebbe esporre la stessa cosa con altre parole dicendo che si lavora di necessità con elementi arbitrari, arbitrariamente scelti e talvolta estranei al problema, e che occorrerebbe liberarsi dalla arbitrarietà delle scelte per giungere alla certezza del valore «obiettivo» dei risultati ottenuti.

Ciò può generare talvolta una certa scomodità nelle dimostrazioni analitiche dei teoremi; pertanto questa circostanza potrebbe essere considerata come una giustificazione della invenzione di altri strumenti formali di deduzione, che nel secolo scorso sono nati per l'analisi dei problemi geometrici,



Il concetto di «gruppo» applicato alla Geometria permette di risolvere in modo elegante e diretto vari problemi; per esempio quello della classificazione dei reticolati e delle pavimentazioni. Qui sono dati alcuni eleganti esempi nel caso del piano euclideo.

e per lo sviluppo delle deduzioni relative ai problemi della Geometria e della Meccanica.

In altre parole, si può osservare che nel secolo scorso vari geometri si misero alla ricerca di simbolismi e di strumenti deduttivi che potessero avere — per così dire — una «presa diretta» sulla realtà degli enti rappresentati e studiati, senza passare attraverso le convenzioni della Geometria analitica e quindi senza richiedere la scelta di elementi di riferimento in certo modo estranei ai problemi trattati.

Un primo germe di questo atteggiamento si potrebbe trovare nell'opera di K.K. von Staudt, il quale nella sua opera sulla Geometria di posizione introdusse un «calcolo delle quaterne» degli elementi di una forma di prima specie; egli giunse così da una parte alla introduzione diretta delle coordinate proiettive [23] e da un'altra parte giunse alla costruzione di un embrione di formalismo che permetteva la deduzione senza dover passare attraverso le coordinate tradizionali.

Accanto all'opera di Staudt, vorremmo ricordare quella di A.F. Möbius che tratta l'aspetto geometrico dei problemi di Statica, e costruisce un insieme di strumenti formali per la rappresentazione degli enti geometrici, e per la deduzione e la ricerca di nuove proprietà geometriche e meccaniche [17].

Un terzo esempio di questo atteggiamento è dato dal volume di H. Grassmann intitolato *Ausdehnungslehre* [11]. In questa opera l'autore introduce due specie di grandezze, che egli chiama rispettivamente intensive ed estensive; per entrambe egli introduce un sistema di simbolizzazione e di calcolo che conduce direttamente alla soluzione di problemi di Geometria e di Statica senza passare attraverso le abituali convenzioni della Geometria analitica.

L'idea di Grassmann venne ripresa da G. Peano, e sviluppata nell'opera intitolata *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann* [19, *iii*]; qui Peano dà una interpretazione precisa di quelle che Grassmann chiamava le grandezze intensive: inoltre egli sviluppa dei metodi di rappresentazione degli enti della Geometria e di soluzione dei problemi; metodi che hanno come oggetto direttamente le aree, i punti, i vettori, i volumi ecc., senza utilizzazione diretta delle coordinate. Ci pare anche interessante ricordare che il «Calcolo geometrico» è la prima pubblicazione in cui Peano presenta anche delle notazioni di logica simbolica; pertanto, in questa sua opera, Peano presenta insieme dei metodi di algebra della logica e di simbolizzazione diretta degli enti della Geometria, con una profonda visione unitaria dei problemi di queste due scienze.

Vorremmo anche aggiungere che, a nostro parere, le notazioni geometriche di Peano si prestano bene per la trattazione dei problemi che oggi si potrebbero dire di *Geometria affine:* si prestano un po' meno bene per trattare problemi di Geometria elementare classica (*Geometria metrica*), ed ancora meno bene per la trattazione di problemi di *Geometria proiettiva.* Ma quest'ultima circostanza può essere spiegata ricordando la mentalità di Peano, che cercò sempre di evitare la enunciazione di proposizioni in cui si affermano delle cose che accadono fuori della portata delle nostre possibili osservazioni. Abbiamo già visto che cosa egli dice a proposito del termine «spazio»: ricordiamo qui che, nella sua costruzione della Geometria, egli parte dal concetto di «segmento» e non da quello di «retta», intesa come figura infinita, così come viene considerata da molti autori.

I metodi di calcolo geometrico di Peano sono stati ripresi e divulgati dai suoi scolari, soprattutto da C. Burali Forti [4].

Si potrebbe dire che nello stesso ordine di idee si muovono le ricerche che diedero origine al calcolo dei quaternioni di W. R. Hamilton, al calcolo degli operatori della Meccanica di G. Giorgi, ed ai vari metodi di calcolo vettoriale che sono in uso ancora oggi.

7) Il continuo geometrico

Nel paragrafo 1 abbiamo parlato di «immaginazione geometrica», asserendo che essa è diversa dalla esperienza; ci pare infatti di poter osservare che gli enti della Geometria hanno bensì la loro origine nella esperienza sensibile, ma vengono anche costruiti con una successiva elaborazione di questa esperienza, elaborazione che ne colma le lacune e ne estende la portata.

Pensiamo che uno degli esempi più importanti di questa elaborazione fantastica della esperienza concreta, visiva e tattile, sia dato dal concetto di «continuo geometrico» che è stato per molti secoli considerato come «evidente»: si potrebbe anzi dire che molti germi della analisi matematica classica si possono ritrovare in questo concetto, che si credeva esprimesse una proprietà caratteristica non solo degli enti studiati dalla Geometria, ma anche di quelli che sono oggetto della Fisica e delle altre scienze della Natura.

Appare anche abbastanza naturale che la maturazione critica della Matematica, avvenuta nel secolo scorso, dovesse portare alla analisi ed alla precisazione di questo concetto in modo da non lasciare le dimostrazioni (molte ed importanti) che venivano basate su di esso, affidate al solo richiamo ad una sedicente «intuizione geometrica». Contemporaneamente, a causa del parallelismo istituito tra i procedimenti della Geometria e quelli dell'algebra dalla invenzione della Geometria analitica, si presentava la necessità di costruire degli strumenti concettuali e simbolici che potessero rispecchiare, in modo impeccabile, i contenuti della Geometria. Si ponevano così le basi per la ricerca di enunciati che descrivessero in modo ineccepibile per postulati le proprietà che la immaginazione attribuisce al continuo geometrico, e per la costruzione rigorosa del campo dei numeri reali.

È quasi superfluo ricordare quali e quanti legami questi due problemi abbiano con la logica, e quali discussioni (anche relativamente recenti) e quante scoperte abbiano provocato le ricerche in questi campi.

L'analisi esauriente dei procedimenti di costruzione del campo dei numeri reali, e dei problemi e delle discussioni che vi si riattaccano esula dagli scopi che qui ci proponiamo.

Diremo solo che gli stretti legami che questi problemi mostrano di avere con la logica sono forse dovuti al fatto che il concetto di numero reale non è separabile dal concetto di insieme infinito (successione di numeri razionali oppure insieme non ordinato di numeri cosiffatti).

Ci limiteremo quindi ad esporre qualche idea a proposito delle formulazioni che hanno precisato il concetto di continuità per quanto riguarda la Geometria.

Nella trattatistica abituale il concetto di continuità viene presentato con un apposito postulato soltanto nel caso della retta; su questo concetto si basano poi le dimostrazioni che vengono fatte a proposito delle altre forme di prima specie (fasci di rette e di piani) ed a proposito delle curve e delle superfici elementari (circonferenza e superfici di rotazione).

Gli enunciati abitualmente riportati nei trattati vengono attribuiti rispettivamente a R. Dedekind ed a G. Cantor. Non stiamo a ripeterli qui perché, come abbiamo detto, essi si trovano nella trattatistica abituale dei testi di Geometria razionale per le scuole dell'ordine medio superiore. Osserviamo solo che l'enunciato di Dedekind presuppone che sulla retta sia stato stabilito un ordinamento totale; per quanto riguarda poi l'enunciato secondo Cantor esso può essere dato con riferimento a successioni di intervalli sulla retta, ognuno contenuto nel precedente; in questo caso è sufficiente postulare che esista almeno un punto comune a tutti gli intervalli della successione. La unicità di tale punto può essere dimostrata come conseguenza della ipotesi che le lunghezze degli intervalli tendano allo zero.

Pertanto, nel caso dell'enunciato secondo Cantor, è necessario non solo che sia stato stabilito un ordinamento totale sulla retta, ma anche che abbia senso confrontare le lunghezze di due segmenti.

È noto poi che l'enunciato secondo Dedekind, quando sia ammesso come valido, permette di dimostrare la proposizione di Archimede sui segmenti rettilinei, e di dimostrare anche la proposizione enunciata da Cantor; quest'ultima invece non permette di dimostrare la proposizione di Dedekind se non si enuncia anche — fra i postulati — la proposizione di Archimede.

Come si vede, i legami tra i due enunciati permettono una analisi logica comparativa dei sistemi di postulati che si scelgono per costruire la Geometria; inoltre, come abbiamo già detto ripetutamente, la enunciazione di questi postulati è necessaria per la costruzione di teorie geometriche rigorose e complete.

Ricordiamo che, dalla mentalità della Matematica greca, erano esclusi gli enunciati che si limitassero ad affermare semplicemente la esistenza di certi enti, senza presentarne concretamente la costruzione. E la mancanza di un postulato di esistenza costituisce uno di quei «nèi» che G. Saccheri cercherà di eliminare con la sua celebre opera [22]; in questo caso si tratta precisamente del «neo» che riguarda la esistenza della grandezza che è quarta proporzionale dopo tre grandezze date.

Tuttavia, anche per quanto riguarda le costruzioni geometriche, non mancano nella posizione euclidea delle situazioni che richiedono una precisazione: ricordiamo, per esempio, che negli *Elementi* di Euclide si dà per scontato il fatto che una retta che ha un punto interno ad una circonferenza intersechi la circonferenza stessa in due punti distinti; proprietà che non è deducibile dai soli postulati enunciati da Euclide. Lacuna questa che gli autori di trattati hanno cercato di colmare in vari modi, o ricorrendo a dimostrazioni basate sul postulato della continuità della retta [7], oppure enunciando un apposito *Postulato del compasso* [12].

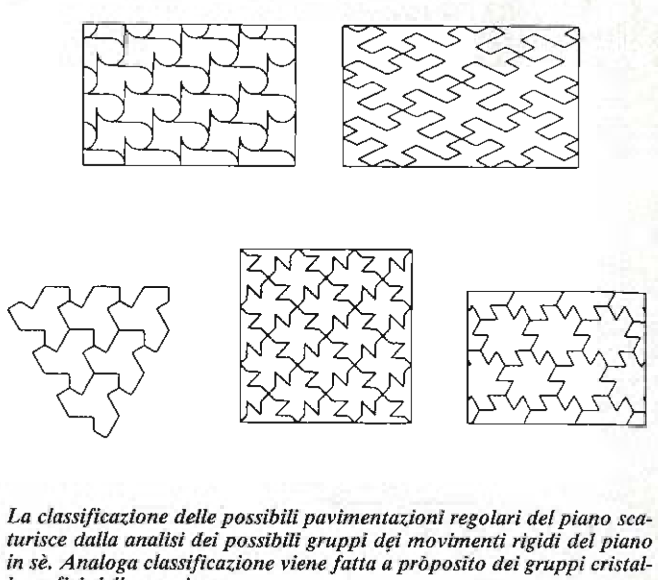
Vorremmo infine accennare al fatto che il concetto di continuità è stato precisato anche con assiomi diversi da quelli che abbiamo presentato nel paragrafo precedente e che — ripetiamo — vengono abitualmente riportati nella trattatistica elementare. Ricordiamo qui le due forme di enunciato che si trovano rispettivamente nelle opere di D. Hilbert e di G. Peano, perché ci sembrano particolarmente interessanti.

D. Hilbert enuncia un postulato che si potrebbe chiamare «di completezza», cioè un postulato il quale afferma che l'insieme degli enti presentato e definito implicitamente dai postulati precedenti è il più ampio insieme di enti che soddisfano a tutti i postulati suddetti. Si potrebbe enunciare lo stesso pensiero forse con altre parole dicendo che tale insieme di enti (punti, rette, piani) non è ulteriormente ampliabile rispettando tutti i postulati precedenti. Questo modo di vedere le cose permette quindi di accostare l'enunciato di Hilbert ai procedimenti di costruzione del campo dei numeri reali a partire dai numeri razionali. Infatti in questo atteggiamento i reali vengono abitualmente presentati come un ampliamento del campo dei razionali; di conseguenza, postulando che l'insieme dei punti, delle rette e dei piani non è ampliabile, si viene anche ad affermare implicitamente che il campo dei numeri reali è quello che fornisce gli strumenti adatti per trattare i problemi della Geometria euclidea.

La posizione di G. Peano è originale, come del resto quasi tutte le sue posizioni nei riguardi della Matematica tradizionale. Egli introduce anzitutto il concetto di «figura convessa» e quello di «segmento» (che è un caso particolare di figura convessa). Il postulato di continuità viene allora da lui enunciato nel modo seguente:

Se h *è una figura convessa, e se* a *e* b *sono punti, il primo appartenente ad* h *ed il secondo no, allora si può determinare un punto* x, *appartenente al segmento* ab *o ai suoi estremi, in guisa che il segmento ax sia contenuto in* h, *ed il segmento* xb *sia tutto fuori di* h [19, *i*].

Peano osserva che questo enunciato esprime in parte la proprietà che si suole chiamare la «continuità della retta»: effettivamente egli si serve di questo postulato per dimostrare le proprietà di esistenza che vengono abitualmente formulate nella Geometria elementare; in particolare egli afferma che, facendo ricorso a questo postulato, è possibile dimostrare che, data una semiretta ed un punto fuori di essa, esiste una unica parallela alla semiretta stessa per il punto. Proposizione, questa, che è valida in quella che Peano chiama la *Pangeometria*, cioè in ogni dottrina geometrica che prescinda da qualunque posizione nei riguardi del postulato euclideo della parallela.



La classificazione delle possibili pavimentazioni regolari del piano scaturisce dalla analisi dei possibili gruppi dei movimenti rigidi del piano in sè. Analoga classificazione viene fatta a pròposito dei gruppi cristallografici dello spazio.

III. PROBLEMI DI DIDATTICA DELLA GEOMETRIA

1) La Geometria come primo passo nel cammino della conoscenza scientifica

Abbiamo cercato di spiegare che, da un certo punto di vista, la Geometria fornisce — a nostro parere — il primo capitolo della conoscenza fisica del mondo, nella misura in cui permette di schematizzare astrattamente i corpi che ci circondano, con riguardo alle sole proprietà di forma, di dimensioni, di mutui rapporti di posizione.

Precisamente noi pensiamo che la nostra esperienza, le nostre manipolazioni sugli oggetti rigidi, le nostre sensazioni spaziali, il fatto stesso che ci muoviamo tra oggetti e che registriamo le loro mutue posizioni, il fatto che siamo continuamente informati (attraverso i canali nervosi della propriocezione) della nostra posizione nello spazio e della posizione delle nostre membra, debbano indurci a pensare che la Geometria sia una delle prime conoscenze umane che vengono razionalizzate e portate a livello scientifico; e questo nostro modo di vedere ci pare confortato dalla osservazione storica.

Ed invero anche una sommaria e superficiale analisi storica conferma che la Geometria ha costituito il primo passo del procedimento con cui l'uomo ha cercato di dedurre le proprietà del mondo che noi osserviamo a partire da poche proposizioni iniziali; quindi costituisce il primo momento in cui la conoscenza delle cose diventa motivata e fondata e perciò scientifica.

E la storia conferma che la prima Matematica veramente scientifica che sia comparsa sulla faccia della nostra Terra — e cioè la Matematica greca — ha avuto nella Geometria la sua principale colonna portante, il che significa che anche la didattica della Matematica dovrebbe tener conto degli insegnamenti della Storia di questa scienza; e ciò diciamo perché pensiamo che proprio la Storia possa indicarci quali siano i concetti che l'uomo incontra all'inizio della sua ricerca di conoscenza certa, e quali siano le concettualizzazioni che ci si presentano come le più facili ed immediate. Pensiamo quindi che da questa osservazione si possano trarre insegnamenti per la ricerca delle migliori strategie didattiche, e per la determinazione delle vie di minor resistenza nella presentazione dei concetti matematici.

Sappiamo bene che delle recenti correnti di pensiero matematico, che hanno dato origine, nel nostro Paese a delle mode didattiche abbastanza diffuse e fortunate, hanno proclamato la morte della Geometria, come ramo della scienza matematica. Noi ci permettiamo di essere di parere diverso, perché pensiamo che il processo cognoscitivo dell'uomo sia molto complesso e coinvolga tanto la ragione che la fantasia; tuttavia, quale che sia la validità di queste opinioni, si potrebbe osservare almeno che il giudizio che riguarda lo stato della scienza matematica dovrebbe essere distinto da quello che riguarda il momento didattico di questa scienza, ed in particolare il momento in cui si vuole condurre gradualmente il discente dalla osservazione informale e disordinata alla schematizzazione della realtà; e poi, in un secondo tempo, alla elaborazione fantastica, che generalizza, e trascura e dimentica i particolari inutili, ed infine al momento logico, della enunciazione precisa delle definizioni e dei postulati ed alla deduzione rigorosa dei teoremi.

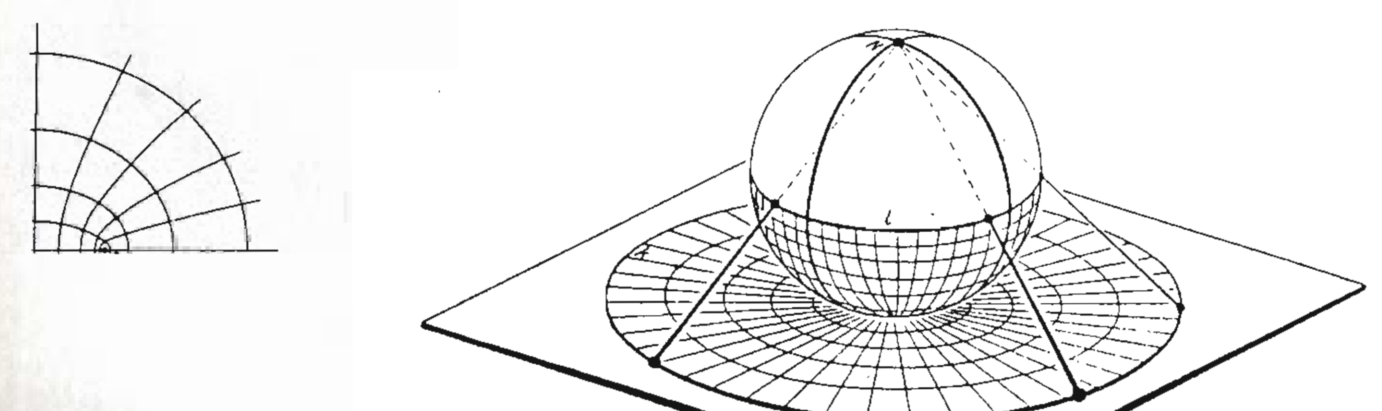
Da parte nostra pensiamo che non si possa dimenticare il significato formativo e didattico della Geometria, significato che del resto è stato tardivamente riconosciuto anche da chi aveva steso della Geometria una condanna definitiva ed irrevocabile.

Il tardivo riconoscimento di cui parliamo si trova in un passo dei *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, laddove si parla dei programmi per l'insegnamento della Matematica nelle scuole francesi, ed in particolare del posto che la Geometria può e deve avere in questo insegnamento.

«Osservazioni più particolari riguardanti l'insegnamento della Geometria.

La Geometria euclidea, oggi lo sappiamo, non è altro che lo studio di uno spazio affine associato ad uno spazio vettoriale reale di dimensione 2, munito di un prodotto scalare definito positivo. Ma è chiaro che non si può presentare in questo modo la Geometria ad un ragazzo di 13 anni...

Non si deve pensare a dare agli allievi una presentazione assiomatica della Geometria. Invece l'allievo dovrà imparare a fare dei brevi ragionamenti, a partire da certi fatti geometrici considerati come evidenti e quindi accettati come veri. In questo avviamento alla riflessione ed al metodo deduttivo è necessario che l'insegnante osservi rigorosamente certe regole: anzitutto i fatti che vengono ammessi ad un certo momento, e che serviranno da punto di partenza per lo sviluppo del ragionamento, debbono essere enunciati chiaramente, e non ingenerare alcuna confusione nella mente dell'allievo. In secondo luogo, il ragionamento deve essere rigoro-



Il concetto di coordinate può essere esteso: nel piano la generalizzazione porta ad un insieme di convenzioni che diano una corrispondenza biunivoca tra punti e coppie ordinate di numeri; su una superficie la generalizzazione porta a quelle che vengono chiamate le coordinate curvilinee o gaussiane. Un esempio è fornito dalle coordinate geografiche sulla Terra o dalle coordinate astronomiche sulla sfera celeste.

so e non deve mai far riferimento ad ipotesi non enunciate esplicitamente e, a più forte ragione, deve evitare i circoli viziosi.

Infine occorre evitare che una proprietà semplice, che è quasi evidente per il giovane, sia dedotta con il ragionamento da un'altra che è meno evidente o più complicata, perché allora l'allievo non potrà più capire le regole del gioco.

Se è conveniente evitare una presentazione assiomatica è invece indispensabile che il maestro possegga una visione d'insieme coerente sulla materia insegnata». (*Nostra traduzione libera dal francese*).

Cercheremo qui di richiamare alcuni aspetti del carattere formativo della Geometria e di mettere in evidenza la grande utilità, per non dire la necessità del suo insegnamento nelle scuole dell'ordine elementare e secondario.

A tal fine vorremmo seguire abbastanza da vicino le argomentazioni che abbiamo svolto finora.

Anzitutto vorremmo considerare il primo momento della conoscenza razionale del mondo; quello della osservazione della realtà fisica esteriore e la sua traduzione in termini che siano chiari, costanti ed esatti.

In questo primo momento ci pare chiaro che la Geometria manifesti il suo carattere educativo, perché porta il discente a svincolarsi dalla sua visione dell'universo che è centrata sul soggetto, per tendere ad una visione che tiene conto anche della possibile variabilità dei punti di vista, della molteplicità degli osservatori e quindi della utilità e quasi necessità di impiegare un insieme di mezzi di comunicazione che abbiano un significato per quanto possibile obbiettivo, cioè staccato dal mondo del singolo osservatore. Questi, infatti, in un primo momento, è portato a considerare l'ambiente che lo circonda come anisotropo, ed a distinguere un sopra ed un sotto, un davanti e un dietro e così via; l'adozione del linguaggio geometrico educa gradatamente a staccarsi da queste denominazioni per giungere a delle descrizioni che possano servire per tutti; o quanto meno dovrebbe educare a distinguere le descrizioni che traducono le proprietà delle figure prese in sè da quelle che traducono delle proprietà relative all'osservatore.

L'abitudine comune alla confusione dei termini, per cui troppo spesso il termine «verticale» (relativo ad una determinata condizione dell'osservatore) viene considerato come sinonimo di «perpendicolare» e viceversa, il termine «orizzontale» viene considerato sinonimo di «parallela», ed altre piacevolezze che capita di leggere ed intendere, dimostrano che questo momento di educazione alla osservazione completa ed al linguaggio preciso è tutt'altro che inutile.

Analoghe considerazioni si potrebbero svolgere a proposito dei termini «base» ed «altezza» del rettangolo, cioè di nomi che il discente ingenuamente prende come inerenti alle cose, mentre sono dati soltanto in relazione ad una particolarissima posizione dell'osservatore rispetto a queste.

E passando via via dalle inesattezze alle assurdità, si potrebbe giungere fino alla frase che parlava di «convergenza delle parallele»; frase il cui grande successo politico fu direttamente proporzionale alla sua totale mancanza di senso.

Pertanto la Geometria costituisce il primo momento educativo alla osservazione precisa ed alla enunciazione esatta, ed un primo sforzo di obbiettivizzazione della descrizione della realtà esteriore che vogliamo descrivere e conoscere.

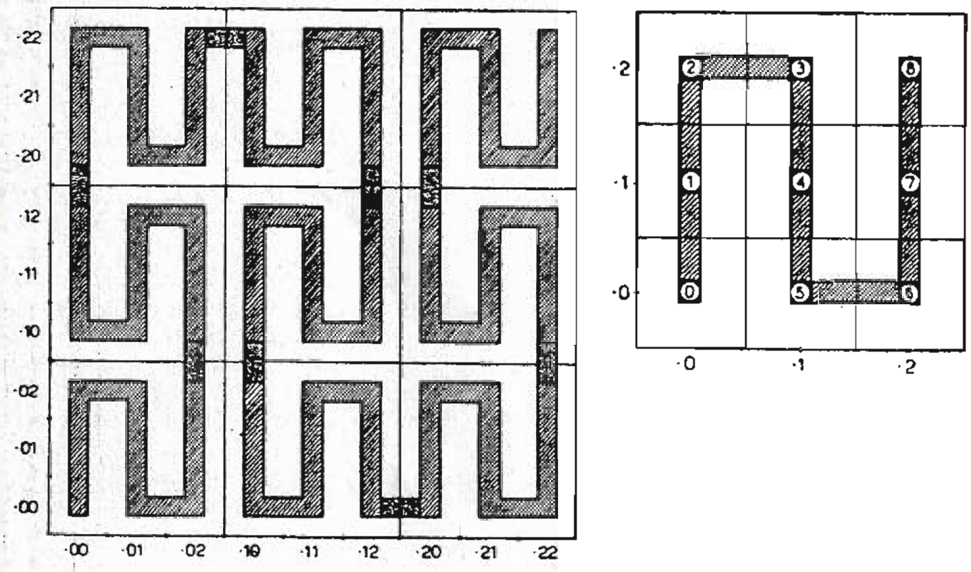
E, procedendo in questa direzione, ci pare anche che la Geometria possa fornire i primi contenuti per allenare il discente alla analisi dei propri comportamenti nei riguardi del reale, alla conoscenza esatta delle manipolazioni eseguite sugli oggetti che osserva e che cerca di conoscere; se questi oggetti sono dei corpi rigidi, ci pare chiaro che l'analisi possa portare fino alla impostazione kleiniana della Geometria, cioè fino alla utilizzazione del concetto di gruppo di trasformazioni, al fine di individuare chiaramente le proprietà che si vogliono studiare, attraverso la nozione fondamentale di «invariante».

In questo ordine di idee quindi la Geometria può fornire, al docente colto ed attento, un insieme di contenuti (oggetti reali e comportamenti soggettivi) che in modo naturale conducono alla struttura algebrica di gruppo.

È appena necessario osservare che in certi atteggiamenti che si dicono «moderni», le strutture algebriche astratte vengono imposte al discente «a priori», prima dei richiami ai contenuti che esse possono dominare; quindi la nostra impostazione conduce in modo naturale nella direzione opposta a questa, che ci pare poco formativa e meno efficace.

Il secondo momento è quello della educazione della fantasia alla estrapolazione; e diciamo educazione perché occorrerebbe in questo secondo momento che l'insegnamento facesse prendere coscienza, nei limiti del possibile ma in modo via via più esplicito, di quanto ci sia di estrapolazione nella costruzione degli oggetti sui quali si impianterà poi la costruzione logica.

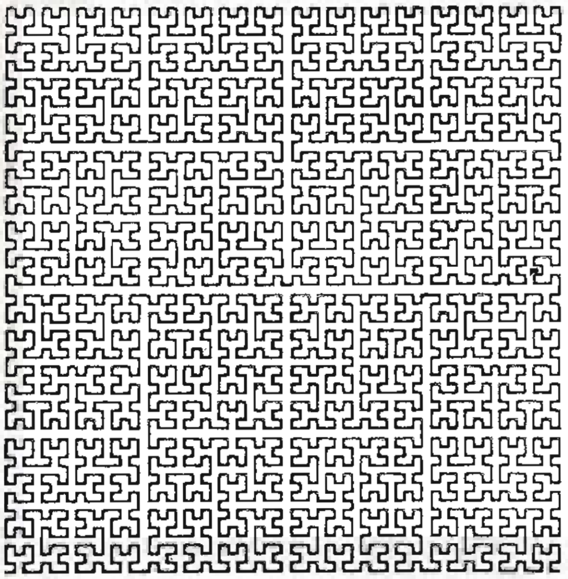
Questa coscienza via via più esplicita dovrebbe quindi andare di pari passo con la coscienza del fatto che il necessario rigore del ragionamento non è condizione sufficiente perché i teoremi dedotti abbiano una validità assoluta nei riguardi



La curva di Peano e l'insieme triadico di Cantor rappresentano forse gli esempi che più colpiscono l'immaginazione nel campo dell'analisi del concetto di continuo geometrico. Essi infatti hanno reso evidente quanto vi fosse di indebita estrapolazione della esperienza empirica nella concezione classica, e quindi hanno reso necessaria una precisazione logica rigorosa dei concetti che venivano giudicati «evidenti». In particolare la cosiddetta «curva di Peano» non è un insieme di punti che rende l'idea dell'oggetto «curva», come ci viene data dalla esperienza e dal linguaggio comune; pertanto la sua invenzione ha reso evidente il fatto che il luogo dei punti del piano le cui coordinate x, y *sono funzioni continue di una variabile reale* t *può avere delle proprietà che appaiono paradossali a prima vista; per esempio tale luogo può essere costituito da tutti i punti di un quadrato. Le funzioni* x *ed* y *sono definite come limiti di successioni di funzioni; la «curva» viene definita come insieme dei punti limiti di una successione infinita di figure: qui sono rappresentate varie figure della successione.*

del mondo reale che ci circonda; perché tale validità è fondata anche sulla aderenza al reale delle proposizioni iniziali che si enunciano senza dimostrazione.

Pertanto, in un momento di maggiore maturazione dei discenti, pensiamo che l'insegnante possa trovare il modo per inserire le considerazioni critiche che riguardano il significato della conoscenza che noi abbiamo del mondo attraverso le teorie fisico-matematiche; conoscenza che troviamo — per così dire — cristallizzata nella Geometria ma che non cambia la natura dei suoi procedimenti anche col cambiare vistoso dei metodi e dei linguaggi che si adottano per descrivere la realtà e per trarre le conclusioni dalle premesse.



2) *La Geometria nella formazione alla deduzione logica rigorosa*

Abbiamo già avuto occasione di domandarci quali possano essere le ragioni che inducono a pensare ad un collegamento privilegiato tra la logica e la Geometria. Non pretendiamo di aver risposto in un modo completo ed esauriente, ma non possiamo tuttavia negare il fatto che gli oggetti della Geometria sono sempre stati considerati come dei contenuti particolarmente adatti per esercitare i discenti al ragionamento. Non vorremmo soffermarci sui numerosi passi che trattano di questo argomento e che si incontrano già nei dialoghi platonici [10]; ma vorremmo osservare che questo aspetto del carattere formativo della Geometria non viene forse tenuto sempre presente dagli insegnanti e dagli estensori dei programmi d'insegnamento. Al contrario si sarebbe tentati talvolta di pensare che certi argomenti di Geometria vengano introdotti nei programmi per ragioni di tradizione, senza badare quindi alle possibili critiche degli sprovveduti, che sono sempre pronti, di fronte ad un qualunque capitolo di scienza astratta, a porre la domanda classica: «A che serve?».

Ricordiamo di aver letto, in occasione di una delle innumerevoli discussioni decennali sulle riforme della scuola media, che è assolutamente inutile insegnare per es. il Teorema di Pitagora a chi intende fare l'avvocato e che non avrà mai occasione di utilizzare tale teorema nel resto della sua vita. Osservazione — come dicevamo — da sprovveduti, alla quale si dovrebbe rispondere che proprio l'avvocato deve incontrare, almeno una volta nella sua vita, un ragionamento astratto e rigoroso, quale si può condurre su contenuti geometrici.

Del resto ci pare di poter accettare quanto abbiamo già esposto in precedenza delle osservazioni ai programmi di insegnamento della Matematica nelle scuole di Francia. Osservazioni che mostrano la esistenza di una resipiscenza, anche se tardiva, in chi aveva proclamato la morte della Geometria ed aveva lanciato il motto «Abbasso il triangolo, abbasso Euclide». Vorremmo anche far nostri i pensieri e le preoccupazioni che già nel 1937 esternava un matematico della Università pavese, grande didatta ed insigne per equilibrio e intuizione, Luigi Brusotti:

«Per un complesso di circostanze da qualche tempo nelle scuole secondarie italiane l'insegnamento geometrico non sembra trovare quella larghezza di svolgimento che meriterebbe; e ciò con particolare riguardo alla risoluzione dei problemi con metodo puramente geometrico. Sfugge il valore educativo dei ragionamenti e procedimenti geometrici per la ginnastica mentale che offre ogni attività logica non sorretta da formalismi algoritmici e per l'esercizio della intuizione visiva come elemento euristico ed orientatore.

Sfugge ancora, per quanto attiene alla stereometria, la circostanza che l'intuizione spaziale è nei più infida e torpida quando non venga sottoposta a disciplina ed esercizio» [3].

Ci pare che il Brusotti abbia messo in evidenza, come meglio non si potrebbe, il valore formativo della Geometria al ragionamento, indipendentemente dai «sussidi algoritmici»; e ci pare che la validità di questa osservazione sia confortata dalla storia della scienza, la quale ci presenta la grande Matematica greca, che giunse a vette altissime utilizzando gli strumenti della logica tradizionale molti secoli prima che fossero inventati quelli della moderna Geometria analitica.

3) *La didattica della Geometria analitica*

Ciò che abbiamo esposto nel precedente paragrafo ci conduce in modo quasi naturale alla analisi della portata e del significato della Geometria analitica e quindi alla discussione dei problemi della didattica di questa branca della Matematica.

Abbiamo già detto che a nostro parere la invenzione della Geometria analitica costituisce una svolta fondamentale del progresso della intera Matematica; ed abbiamo anche riportato la convinzione di Cartesio, che aveva chiara la coscienza del valore metodologico, del potere di dimostrazione e di scoperta che erano contenuti in questa sua opera. Sarebbe quindi poco saggio bandire questo capitolo dall'insegnamento della scuola secondaria, quando si deve constatare che le convenzioni della Geometria analitica sono adottate quotidianamente dalla Fisica, dalla Economia e nella pratica per illustrare l'aspetto matematico dei fenomeni della natura e della società.

Vorremmo tuttavia osservare che questa dottrina può essere insegnata in vari modi; per semplicità di presentazione prenderemo in considerazione soltanto due posizioni antitetiche e distanti, che ci serviranno ad esemplificare ciò che intendiamo esporre ed a fissare le idee. Invero secondo un atteggiamento che forse è più diffuso di quanto non sia desiderabile, la Geometria analitica viene presentata come una raccolta di formulette, una specie di ricettario di cucina, da utilizzarsi senza cercare troppo di comprenderne le origini, le motivazioni ed i fondamenti. Un atteggiamento cosiffatto ci pare ben poco formativo, e corrisponde ad un atteggiamento didattico che considera la Matematica come un puro strumento, che ha ben poco significato culturale.

Ci pare di poter dire invece che — a nostro parere — anche l'insegnamento della Geometria analitica dovrebbe avere uno scopo formativo, che può essere conseguito se si presenta questa branca della Matematica come una specie di linguaggio, un insieme di convenzioni per rappresentare gli oggetti della Geometria, per dedurne le proprietà e per risolvere i problemi; linguaggio che ha poco significato se si mira ai puri contenuti ed ai problemi singolarmente presi; mentre ne ha uno grandissimo se, come deve avvenire per tutti i linguaggi che si adoperano nella scienza e nella pratica, esso viene continuamente controllato, con particolare riguardo non solo agli sviluppi algoritmici, ma anche ai suoi limiti ed ai suoi significati. Ci pare infatti di poter dire che la traduzione da un linguaggio ad un altro richiede ad ogni passo l'attenzione e la sorveglianza di chi la esegue; nel caso della Geometria analitica il controllo può essere esercitato con quella operazione di «discussione» (come già abbiamo detto) che mira appunto a discernere i significati delle formule e delle procedure risolutive e ad evitare le applicazioni meccaniche di procedure non capite, applicazioni che spesso portano a risultati risibili o assurdi.

Pertanto anche questa branca della Matematica può e deve avere il suo valore formativo, come tutto il resto dell'insegnamento della scienza nella scuola. Ed anche a proposito dei metodi della Geometria analitica pensiamo che l'insegnante colto ed accorto possa riprendere il discorso di critica e di analisi della nostra conoscenza fisico-matematica della natura di cui dicevamo sopra.

Carlo Felice Manara

BIBLIOGRAFIA

[1] Beltrami, Eugenio, *Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea,* Giornale di Mat. (1868).

[2] Bolyai, Giovanni, *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) indipendentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.* Trad. in francese col titolo: *La science absolue de l'espace indépendante de la vérité ou de la falsité de l'axiome XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir à priori),* Paris 1896.

[3] Brusotti, Luigi, *Questioni didattiche,* in «Enciclopedia delle Matematiche elementari», Vol. III, Parte I, Art. XXIX, Milano, 1937.

[4] Burali Forti, Cesare, *Lezioni di Geometria metrico-proiettiva,* Torino, 1904, *Corso di Geometria analitico-proiettiva,* Torino, 1912.

[5] Cassina, Ugo, *i) Le dimostrazioni in Matematica,* Annali di Mat. (4) 29, 1949; *ii) Sulle definizioni per astrazione,* Atti I Congresso di studi metodologici, Torino, 1952.

[6] Enriques, Federigo, *i) Spazio e tempo davanti alla critica moderna,* in «Questioni riguardanti le matematiche elementari» raccolte ed ordinate da F. Enriques, Art. XII; *ii) Per la storia della logica,* Bologna, 1936; *iii) Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti, Articolo «Analisi».*

[7] Enriques, Federigo & Amaldi, Ugo, *Elementi di Geometria,* Bologna, 1916.

[8] Euclide, *Gli elementi di Euclide,* a cura di A. Frajese e L. Maccioni, Torino, 1970.

[9] Fano, Gino, *Geometria non euclidea. Introduzione geometrica alla teoria della relatività,* Bologna, 1935.

[10] Frajese, Attilio, *i) Platone e la Matematica nel mondo antico,* Roma, 1963; *ii) Attraverso la storia della Matematica,* Roma, 1962.

[11] Grassmann, Hermann, *Ausdehnungslehre.*

[12] Halsted, G.B., *Rational Geometry,* New York, 1901.

[13] Heath, Thomas L, *The thirteen books of Euclide's elements,* Cambridge, 1926.

[14] Hilbert, David, *Grundlagen der Geometrie.* Tradotto in italiano con il titolo: *Fondamenti di Geometria,* Milano, 1970.

[15] Klein, Felix, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen,* Gottingen, 1878, tradotto in italiano col titolo: *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti,* Annali di Matematica, 1891.

[16] Lobatchewski, Nicolai Ivan, *Recherches géométriques sur la théorie des parallèles,* Paris, 1900.

[17] Möbius, A.F., *Der baryzentrische Kalkül.*

[18] Pascal, Blaise, *i) De l'esprit géométrique et de l'art de persuader; ii) Pensées.*

[19] Peano, Giuseppe, *i) Principi di Geometria logicamente esposti,* Torino, 1889; *ii) Sui fondamenti della Geometria,* Torino, 1894; *iii) Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann,* Torino, 1888.

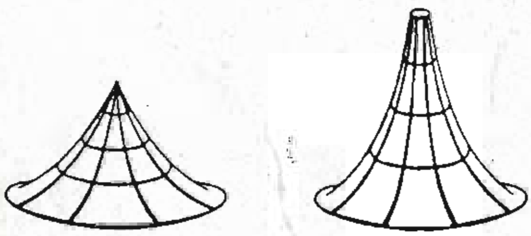
[20] Pieri, Mario, *Della Geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo; Monografia del punto e del moto,* 1898-99.

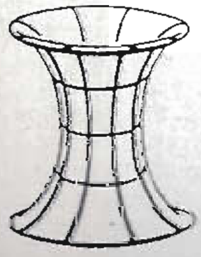
[21] Riemann, Bernhard, *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen,* Ges. Math. Werke, Leipzig, 1876.

[22] Saccheri, Girolamo, *Euclides ab omni naevo vindicatus; sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia. Auctore Hieronimo Saccherio Societatis Jesu in Ticinensi Universitate Matheseos Professore,* Mediolani MDCCXXXIII, tradotto in italiano col titolo: *L'Euclide emendato* da G. Boccardini, Milano, 1904.

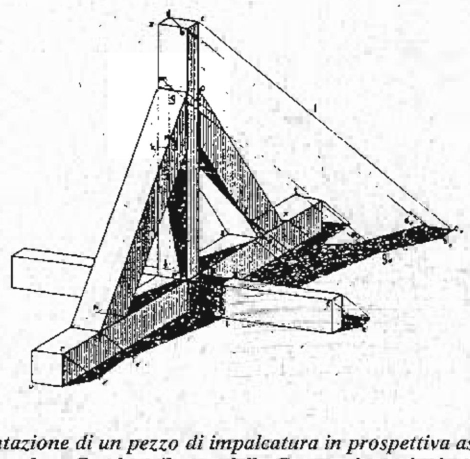
[23] Staudt, Georg K.K. von, *Beiträge zur Geometrie der Lage.*

[24] Tannery, Paul, *Notions historiques,* in *Jules Tannéry,* «Notions de Mathématiques», Paris, 1903.





La Geometria differenziale ha dato occasione alla generalizzazione del concetto di coordinate; inoltre gli oggetti studiati dalla Geometria differenziale hanno fornito dei modelli di Geometria non euclidea. La pseudosfera, superficie a curvatura costante negativa, con i tre casi che può presentare, dà una immagine del piano della Geometria iperbolica di Lobatchewski.



Rappresentazione di un pezzo di impalcatura in prospettiva assonometrica, con ombre. Con lo sviluppo della Geometria proiettiva, i metodi di riproduzione tridimensionale dello spazio raggiunsero un rigore scientifico, dando luogo ad una branca della Geometria: la Geometria descrittiva. Essi hanno una ovvia applicazione nella descrizione della superficie terrestre (cartografia); ma vengono impiegati anche nella Tecnica e nella Matematica applicata.